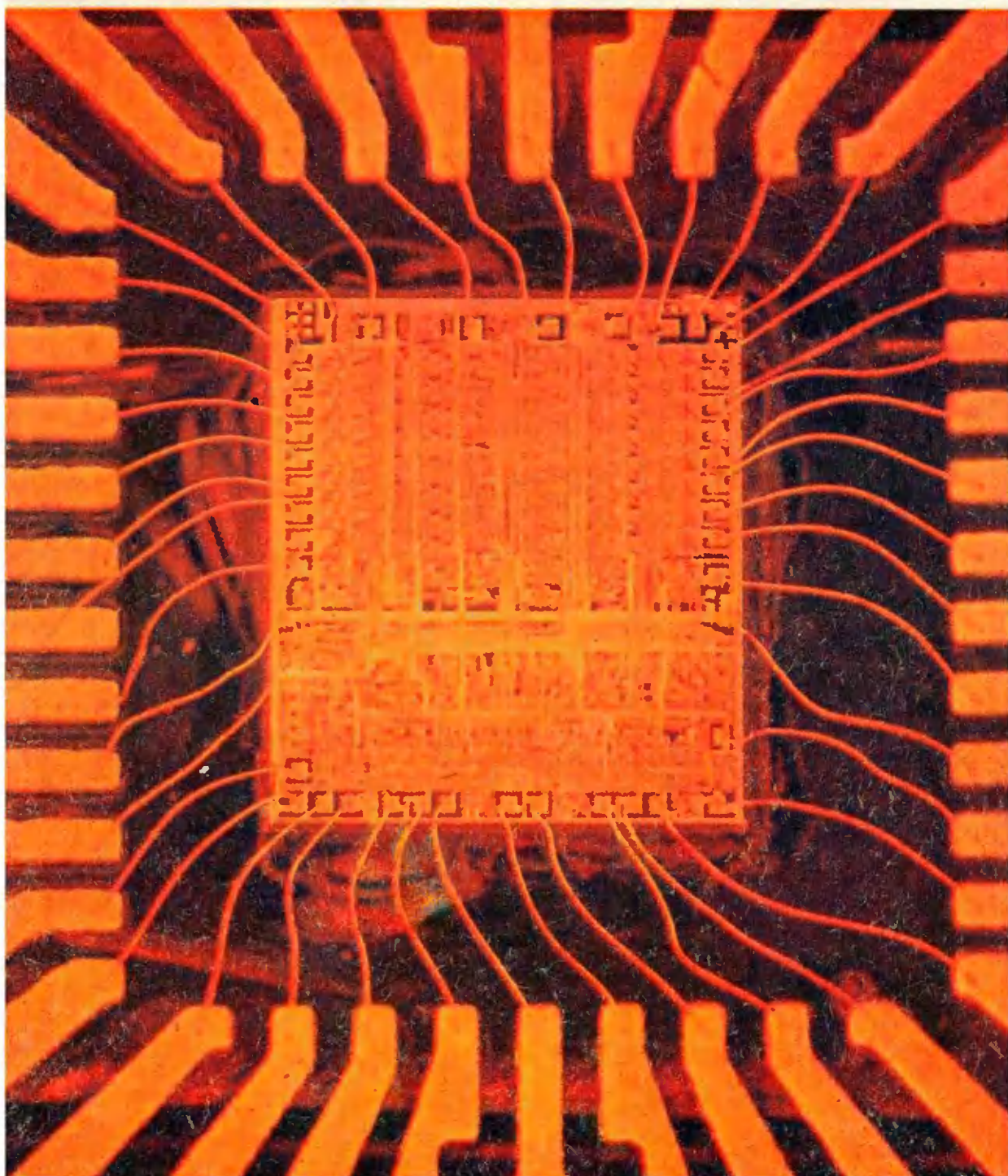
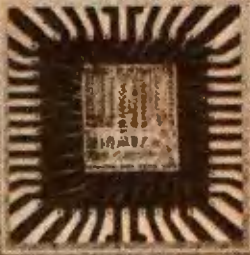


Квант

2
1983

*Научно-популярный физико-математический журнал
Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР*





Один микропроцессор размером с канцелярскую кнопку по запасу вмещаемой информации заменяет множество книг. Слева — фотография микропроцессора, внизу — фрагмент картины голландского художника Я. Хеема «Стол, заваленный книгами» (1628 г.).





Издательство «Наука» Главная редакция физико-математической литературы



В НОМЕРЕ:	IN THIS ISSUE:
2 А. П. Ершов. Программирование — вторая грамотность	A. P. Ershov. Programming — the second literacy
8 И. К. Кикоин. Анатолий Петрович Александров	I. K. Kikoin. Anatoly Petrovich Alexandrov
11 Я. А. Смородинский. Черные дыры	Ya. A. Smorodinski. Black holes
16 Л. С. Понтрягин. Комплексные числа	L. S. Pontriagin. Complex numbers
Новости науки	Science news
20 М. А. Кожушнер. Холодный взрыв	M. A. Kojushner. Cold explosions
Лаборатория «Кванта»	Kvant's lab
21 В. И. Пентегов. Давайте нагреем воду сверху	V. I. Pentegov. Heating water from above
Школа в «Кванте»	Kvant's school
25 В. Е. Белонучкин. Уравнение газового состояния	V. E. Belonuchkin. Equation of gaseous state
28 А. А. Болибрух, В. М. Уроев, М. И. Шабунин. Задачи с устного экзамена в МФТИ	A. A. Bolibruch, V. M. Uroev, M. I. Shabunin Oral examination problems from M. P. T. I.
29 Л. Ф. Штернберг. Многофигурная стереометрическая задача	L. F. Shternberg. Multiple figure space geometry problem
«Квант» для младших школьников	Kvant for younger school-children
35 Задачи	Problems
36 Л. А. Лещинский, Т. С. Петрова. Дано... Требуется определить.	L. A. Leschinski, T. S. Petrova. Given.. Determine..
Задачник «Кванта»	Kvant's problems
38 Задачи М786—М790; Ф798—Ф802	Problems M786—M790; P798—P802
41 Решения задач М765—М769, М771—М774; Ф783—Ф787	Solutions M765—M769, M771—M774; P783—P787
Олимпиады	Olympiads
51 Задачи республиканских олимпиад	Olympiad problems from our Republics
Искусство программирования	The art of programming
54 Стандартные приемы программирования. Урок 5	Standart programming methods. Lesson 5
Практикум абитуриента	College applicant's section
60 Ответы, указания, решения Наша обложка (34) Смесь (52) Шахматная страничка Каспаров — победитель Московского межзонального турнира (3-я с. обложки)	Answers, hints, solutions Our cover page (34) Miscellaneous (52) The chess page Kasparov wins the Moscow interzone tournament (3rd cover page)



Программирование — вторая грамотность

Член-корреспондент АН СССР
А. П. ЕРШОВ

Эта статья основана на выступлении автора на открытии конференции Международной Федерации по обработке информации и ЮНЕСКО «Применение ЭВМ в обучении» в Лозанне (Швейцария) в июле 1981 г. Текст выступления переработан специально для «Кванта».

Я сознаю, что сравнение программирования с грамотностью многим покажется рискованным. По одну сторону нашего сравнения — необычная профессия, требующая способности и длинного обучения, а по другую — общее достояние, важнейшее свойство современного человека.

Тем не менее я сразу постараюсь пояснить, чем это сравнение поучительно.

Прежде всего, не нужно забывать, что всеобщая грамотность существовала не испокон веков. Как и программирование, она имела свое предначало, возникновение и развитие. Мы привыкли к тому, что СССР — страна практически сплошной грамотности; а ведь 100 лет тому назад в России грамотных было лишь около 20%. Еще сейчас на Земле насчитывается порядка 800 млн. неграмотных.

Далее, как в основе всеобщей грамотности, так и в основе широкого распространения программирования, лежит *техническое изобретение*: печатный станок и ЭВМ соответственно. Развитие и распространение книгопечатания привело к всеобщей грамотности. Развитие и распространение ЭВМ приведет к всеобщему программированию.

Так же как слово «грамотность», смысл которого теперь значительно шире, чем просто умение писать и читать, слово «программирование», приобретает более широкое значение. Это не просто умение писать программы для ЭВМ на каком-то специальном языке, а способность составлять четкие, целенаправленные правила действия в самых различных ситуациях. В этом широком смысле программирование является такой же *органической способностью* человека, как и грамотность. Эта способность подготовлена организацией нервной системы человека, она присуща людям в труде, при общении друг с другом, в созерцании природы и во взаимодействии с ней.

Наконец, хотя грамотность и программирование можно, конечно, всячески сравнивать, находя между ними много аналогий, самое главное, пожалуй, состоит в том, что они *дополняют друг друга* и вместе составляют новое представление о гармонии человеческого ума.

На последнем тезисе стоит немного остановиться.

Мы все помним простые и емкие слова Максима Горького: «Любите книгу, источник знания». Мы понимаем грамотность как способность выразить знания в виде текста. Однако остается проблема: *как перейти от знания к действию*. «Сообразуйте

действия со словами, а слово с действием», говорит один из героев Шекспира. Вот здесь — в переходе от знания к действию — и возникает программирование.

В докнижный период единство слова и дела осуществлялось естественно и понятно. Словами и примером старший (учитель) обучал младшего (ученика) делу. Понимание было не чисто умственным озарением, а достижением поставленной цели, овладением приемами изучаемого дела.

Появление книги нанесло сильнейший удар единству слова и дела. Отделился процесс накопления знаний от их применения, появились новые формы жажды знаний и новые ощущения постижения истины. Во всех языках образовались специальные выражения для людей, отдающих предпочтение книге в своем стремлении к знанию. В этих выражениях бывает оттенок пренебрежения, в целом несправедливый, но иногда заслуженный.

Постепенно стало ясно, что книжное накопление знаний требует *новых механизмов* для превращения этих знаний в действие. Так, задача программирования появилась задолго до ЭВМ. Появление ЭВМ лишь сделало проблему программирования актуальной, так же как книгопечатание сделало актуальной проблему грамотности.

Но грамотность и способность к действию сами по себе еще ничего не значат. В этом противопоставлении трудно сказать от чего мы страдаем больше: от невежества или бездеятельности. Гёте предупредил: «Нет ничего страшнее деятельного невежества». Однако опыт подсказывает, что оно произрастает при недостаточно активной жизненной позиции образованных и культурных людей. Отсюда наше стремление ко второй грамотности — не только к обучению писать команды, но к воспитанию человека, решительного и предусмотрительного вместе.

Книгопечатание

Вернемся снова к отправной точке нашего сравнения — к книгопеча-

танию. Я приведу лишь некоторые данные, характеризующие темп, размах и взаимообусловленность книгопечатания и грамотности.

Первые печатные издания увидели свет в 1445 году. Еще не истек XV-й век, а в мире уже работало свыше 1000 типографий, выпустивших порядка 10 млн. экземпляров книг, почти мгновенно превысив весь наличный запас рукописных изданий. В 1962 г. во всем мире было напечатано 10 млрд. книг, то есть каждый житель земли приобрел в среднем две книги. Средняя семья в СССР покупает в год 30 книг в условиях постоянного дефицита.

Есть, как мне кажется, глубокие аналогии между книгой и ЭВМ как продуктом и их общие отличия от остальных изделий. Все остальные изделия носят специализированный характер, выполняют некоторую частную функцию. Отношение объема производства такого продукта к числу потребителей — малая константа. С книгами и ЭВМ дело обстоит по-другому. И книги, и вычислительные машины несут в себе информационную модель внешнего мира во всем его разнообразии и изменчивости. Здесь пылливость и любознательность человека не позволят ограничиваться малой константой.

Взаимосвязь между грамотностью и книгопечатанием за последнее сто-

летие, на примере опыта СССР, видна из графика на рисунке 1.

Если поверить в справедливость наших аналогий, то тогда надо признать, что в отношении ЭВМ и программирования мы находимся примерно на том месте, на котором книгопечатание и грамотность находились в середине XIX века. Это дает некоторое представление о размахе и объеме работы, которую надо предпринять для подготовки встречи мира ЭВМ с миром людей.

Мир ЭВМ

Средства массовой информации создали у нас привычное видение вычислительной машины: экран и клавиатура дисплея, бобины магнитных лент, кружево перфоленты, длинное полотно выдачи с печатающего устройства, мигающие огоньки инженерного пульта, угловатые шкафы, забитые электронными деталями. Но это представление уже не соответствует основным путям развития вычислительной техники. Машина будущего — это прежде всего тончайший срез кристалла кремния, вставленный в миниатюрную рамку, опутанную паутиной тончайших проводов, и помещенный в укромное место практически каждого промышленного изделия.

Вы наверняка поняли, что речь идет о *микропроцессорах*, которые хотя и появились всего чуть больше десяти лет, но уже производятся десятками миллионов штук в год. Появление и развитие микропроцессоров — по моему глубокому убеждению — самое революционное техническое новшество XX-го века. Сейчас информационно-вычислительное устройство, со скоростью примерно 100 тысяч операций в секунду, с оперативной памятью в 5 тысяч чисел (слов) и с внешней памятью, сравнимой с книгой средней величины, помещается в спичечный коробок!

На пути этого развития возникает, однако, одно принципиальное препятствие. В настоящее время способность человека передавать знания машине безнадежно отстает от способности создать эту машину. Затраты на создание микропроцессора

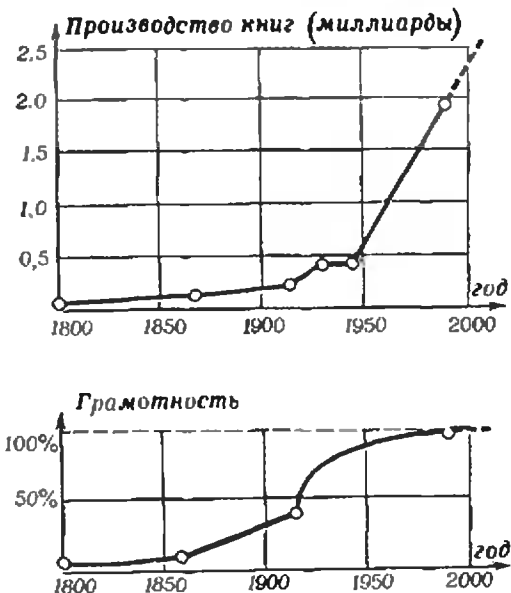


Рис. 1



Книгопечатня XVI в. Гравюра на дереве.

исчисляются в человеко-часах, а затраты на создания программ для них — в человеко-месяцах (даже с учетом того, что программы делаются в большом числе экземпляров). Наглядно динамика соотношения затрат на информационное оборудование («hardware») к затратам на их программное обеспечение («software») видна на известной кривой Бэма. Рис. 2. Простые расчеты показывают: для того чтобы запрограммировать все производимые через двадцать лет микропроцессоры, надо будет посадить за программирование... все взрослое население земного шара.

Руководители производства не могут отмахиваться от этих расчетов как от еще одного парадокса, которых там много в нашем сложном мире. Иначе они могут оказаться, выражаясь словами писателя-фантаста Артура Кларка, «в точно таком положении, как неграмотные средневековые бароны, гордо заявлявшие, что счетом и письмом у них занимаются секретари». Средневековые бароны и их потомки ушли в небытие, считать и писать научился каждый, а у секретарей появились новые хозяева и новые обязанности. То же должно случиться в програм-

мировании: организаторы производства, не имеющие представления об ЭВМ и программировании, уйдут в небытие, а программировать научится каждый — это я и называю *второй грамотностью*.

Таким образом мы переходим от мира машин к миру программ.

Мир программ

Герой Мольера, меесье Журдэн, был в высшей степени удивлен, когда узнал, что всю жизнь говорил прозой, не подозревая этого. Сегодня человечество оказывается в положении меесье Журдэна, с удивлением обнаруживая, что оно живет в мире программ.

Да, мы живем в мире программ и сами постоянно программируем, не сознавая этого.

Программами буквально напичкан наш организм, само развитие организма есть выполнение генетической программы. Все без исключения физиологические процессы — это огромная, тщательно отлаженная и сложно устроенная библиотека программ поведения организма.

Как правило, производственный процесс — это работа по программам. Хорошо работающий цех всегда внутренне формализован, его эффективность зависит от отлаженности программ, выполняемых людьми. Даже если процесс связан со случайностью, например охота или вождение автомашины, непредсказуемость сказывается лишь на выстраивании цепочки ситуации, но не на реакции на эти ситуации. Реакция осуществляется по программе, почти

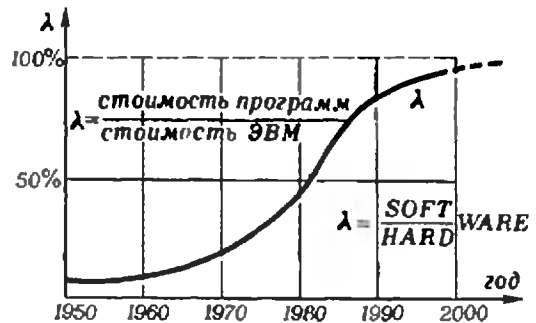


Рис. 2.

всегда работающей в автоматическом режиме.

Повседневная жизнь человека, особенно городская — это деятельность по программам. Каждый человек, придерживающийся режима, с гордостью почувствует себя программистом, если представит себе свою обычную утреннюю последовательность действий, начиная от звонка будильника и кончая началом работы.

Мы жалуемся на социальные болезни века, в частности — отстраненность от общих дел, пассивность, ратуем за формирование активной жизненной позиции. Что это такое? Попросту говоря, это способность выработать программу действий и *следовать* ей.

Таким образом, мир программ — это далеко не только начинка памяти ЭВМ. Это, прежде всего, — огромный запас операционного знания. Это «деятельное знание» хранится в библиотеках программ для ЭВМ, в обычных библиотеках, в генофонде всего живого. А используется оно как вычислительными машинами, роботами, автоматическими устройствами, так и живыми организмами, в частности, человеком.

До сих пор многим кажется, что овладение программированием должно начинаться с ознакомления с устройством какой-нибудь ЭВМ и кропотливого заучивания деталей записи программ для этой ЭВМ на каком-нибудь конкретном алгоритмическом языке. Без навыков, конечно, нельзя обойтись нигде, но основные законы программирования, способы перехода от знания к действию, организация действий в пространстве и во времени носят, на самом деле, гораздо более фундаментальный и общий характер, приближающий их к основным законам математики или речи и письма.

На меня всегда производит сильное впечатление один простой пример задачи на программирование, показывающий переход от знания к действию. Я напишу последовательные этапы перехода от формул, выражающих знание, к программе, выражающей действие, для задачи

возведения числа $x > 0$ в целую степень n :

$x^0 = 1$ $x^{n+m} = x^n \cdot x^m$ $x^{mn} = (x^m)^n$	I	$x^0 = 1$ $x^{n+1} = x^n \cdot x$ $x^{2n} = (x^n)^2$	II
$x^0 = 1$ $x^{2n} = (x^n)^2$ $x^{2n+1} = x^{2n} \cdot x$	III	если $n=0$ I если n четное $(x^{n/2})^2$ если n нечетное $x \cdot x^{n-1}$	IV
$\text{степень}(x, n) =$ если $n=0$ то 1 иначе если чет n то $(\text{степень}(x, n/2))^2$ иначе $x \cdot \text{степень}(x, n-1)$ все			V

Предлагаю каждому дать свое объяснение того, какие законы и какое знание здесь применяются при переходе от этапа к этапу, для того, чтобы перейти от очевидного знания к весьма нетривиальной программе.

Вы почувствуете, что это, одновременно, и легкая и трудная задача, так как, с одной стороны, понятно, что делается, и, с другой стороны — трудно объяснить эти действия в общей форме.

Таким образом, перед нами стоит важнейшая задача — выработать общие принципы программирования, выделить в нем основные понятия и выразить в общепонятной форме. Такие задачи наука всегда решала вместе с образованием, и это значит, что рано или поздно мир ЭВМ и программ соприкоснется с миром школы.

ЭВМ в школе

Сейчас, после появления микропроцессоров, нет смысла ставить вопрос о том, быть или не быть ЭВМ в школе. ЭВМ уже есть во многих школах и будет приходить туда в нарастающих количествах.

Часто активно высказывается мнение, что ЭВМ с программой — это то же самое, что задача с известным решением; появление электронного помощника воспитывает леность ума и ничего больше. Одна из лучших юмористических картинок американского журнала «Нью Йоркер» изображает бедного Джонни, уныло глядящего на кучку карманных калькуляторов перед ним, и не менее измученную Маму, терпеливо повторяющую свой



Программисты за работой

вопрос: «Ну, посмотри, если у тебя пять карманных калькуляторов и ты возьмешь от них два, сколько же останется?»»

Эти предостережения опасности «кнопочного» образования раздавались и раньше. Однако многочисленный опыт общения детей самых разных возрастов с ЭВМ подтверждает обратное: активность, пытливость, а с ними и способности возрастают очень сильно.

В нашей местной школе половина одного из классов выучила исторические даты назубок, после того как один из юных программистов вложил в ЭВМ диалоговую программу, сообщающую исторические даты, а другой, подвергнув учительницу экзамену с помощью ЭВМ, поймал ее несколько раз на неточностях.

Какая-то компания выпустила на рынок игру-компьютер, которая проверяет правописание английских слов. С помощью синтезатора речи слово произносится, ребенок набирает это слово по буквам, машина проверяет и реагирует. В карманную игру трудно вложить хороший синтезатор речи, но авторы обратили его недостаток в достоинство, сделав его

очень похожим на голос Буратино. Представляете себе восторг детей, когда игрушка пищит им голосом Буратино: «Пробуй снова, пробуй снова, ты не знаешь это слово!»

Перед конкурсными вступительными экзаменами в одном из вузов установили консультационную информационную систему, реализованную на ЭВМ. Около терминалов всегда толпилась очередь. В интересах ребят рядом посадили двух преподавателей, чтобы разгрузить машину. Преподаватели сидели без дела, а у терминалов — по-прежнему очередь. Почему? «А мы не стесняемся перед машиной обнаружить свое незнание, а перед преподавателем стесняемся», — говорили ребята. ЭВМ создает игровую обстановку, которая тут ценней реальной жизни, — ведь из игры можно выйти не утратив достоинства.

Заключение

Я начал свою статью со сравнения. Сейчас мы можем раскрыть его конкретное содержание. Мы стоим на пороге практически беспредельного развития и распространения электронной вычислительной техники в обществе. Машина становится интеллектуальным орудием и партнером практически во всех сферах жизни и деятельности человека. Развитие мира программ, постоянное усложнение окружающей среды требуют и одновременно делают возможным значительно повысить интеллектуальную силу человечества.

Для того чтобы не затеряться в этом стремительно развивающемся мире, мире удивительной техники и усложняющихся программ, уже не хватает грамотности в традиционном ее смысле. Необходимо преодолеть и рубеж, который я назвал рубежом второй грамотности. И, в первую очередь, это относится к учащимся.



Анатолий Петрович Александров

(к 80-летию со дня рождения)

Академик И. К. КИКОИН

13 февраля исполнилось 80 лет выдающемуся советскому физику, Президенту Академии наук СССР академику Анатолию Петровичу Александрову. Мне выпало большое счастье работать совместно с академиком А. П. Александровым много лет. Сначала это было в Ленинградском физико-техническом институте, которым тогда руководил замечательный советский физик, академик А. Ф. Иоффе, затем — в Институте атомной энергии им. И. В. Курчатова, где мы продолжаем работать вот уже свыше 30 лет. Поэтому у меня есть полное право дать объективную характери-

стику научной деятельности этого выдающегося ученого.

Анатолий Петрович Александров известен своими научными работами в области ядерной физики и ядерной техники. Весь мир знает его как главного ядерного энергетика Советского Союза. Замечательно, что он начал заниматься ядерной физикой уже будучи крупным специалистом совсем в другой области — в физике диэлектриков и полимеров. Во время войны А. П. Александров еще был далек от ядерной физики, занимаясь проблемой защиты кораблей от вражеских магнитных мин. Лишь в самом конце войны и в первые послевоенные годы он в течение короткого времени переквалифицировался в физика-ядерщика, занялся ядерной техникой и стал одним из крупнейших ученых в этой новой для него области. Вскоре А. П. Александров стал заместителем И. В. Курчатова и с тех пор практически взял на себя тяжелый труд научного руководства проблемой промышленного ядерного реакторостроения. И. В. Курчатов был поглощен реализацией идеи сооружения первой в мире атомной электростанции. Это была трудная проблема, нелегко было убедить специалистов в возможности решения этой сложной задачи. В те, теперь уже далекие, годы мало кто верил в целесообразность и техническую возможность строительства промышленных атомных электростанций, способных конкурировать с обычными тепловыми станциями. Анатолий Петрович со своими сотрудниками провел огромную научную и инженерную работу, чтобы обосновать такую возможность. В результате была разработана и принята научно обоснованная программа развития атомной энергетики в нашей стране.

Достигнутый в этом деле блестящий успех побудил А. П. Александрова заняться проблемой применения ядерной энергетики и в судостроении, решить научно-технические проблемы судовых ядерных установок. Триумфом этой деятельности явилось создание первого в мире атомного ледокола «Ленин». Без преувеличения можно сказать, что ледо-

кол «Ленин» — это детище Александра. Он был научным руководителем при проектировании судна, непосредственно руководил конструированием ядерного реактора — сердца корабля, участвовал в швартовых испытаниях. Следующие поколения атомных ледоколов — «Брежнев» и «Сибирь» — также сооружались под его научным руководством.

Заслуги А. П. Александрова в области атомной науки и техники нашли свое наиболее яркое выражение в том, что при его непосредственном участии вырабатывалась ядерно-энергетическая политика нашей страны. Для решения столь важной государственной задачи Александрову пришлось организовать целый комплекс научно-технических исследований, обеспечивающих безошибочность принимаемых решений.

Примером реализации ядерно-энергетической программы нашего государства может служить знаменитая Ленинградская атомная станция (ЛАЭС). По мощности она была первой в мире (около миллиона киловатт в блоке); за рубежом только теперь начали сооружать блоки такой мощности. Научное руководство проектированием этой станции также осуществлял А. П. Александров. Проектированию и сооружению ЛАЭС предшествовали научные исследования крупного масштаба. В частности, пришлось провести трудные, но чрезвычайно важные исследования в области теплофизики. Дело в том, что тепловые нагрузки в тепловыделяющих элементах реактора столь большой мощности очень велики и поэтому поведение этих элементов трудно предвидеть. Нужно было разработать специальные теплофизические стенды, на которых можно было в крупном масштабе моделировать те опасные явления, которые могут возникать в эксплуатационных условиях.

Под руководством Анатолия Петровича, по его идеям, при его непосредственном участии создание таких стендов было осуществлено в Институте атомной энергии им. И. В. Курчатова, которым А. П. Александров руководит без малого 25 лет.

Проведение этих теплофизических исследований в институте обеспечило возможность эксплуатации мощных атомных электростанций без каких бы то ни было существенных неполадок. Такая тесная связь научных исследований и технических решений позволила нашей стране выйти на передовые позиции в области ядерной энергетики.

Обладая широким научным кругозором, Анатолий Петрович ясно понимает значение перспективных работ, которые относятся к дальнейшему развитию ядерной энергетики, в частности к проблеме XXI века — термоядерной энергетике. Работы по управляемому термоядерному синтезу были начаты по инициативе И. В. Курчатова, который уделял им особое внимание. В настоящее время известно, что для технического использования термоядерной энергии необходимы большие магнитные поля. Однако их создание связано с огромным расходом энергии, который может оказаться больше, чем энергия, выделяемая при термоядерной реакции. И только один способ позволит избежать этой трудности — создание магнитного поля с помощью сверхпроводящих материалов. Поэтому в Институте атомной энергии им. И. В. Курчатова при активном участии Анатолия Петровича широко развернуты работы по технической сверхпроводимости. Первая в мире термоядерная установка типа «Токамак» — «Т-7», в которой магнитное поле создано с помощью сверхпроводящих обмоток, разработана и создана у нас, в Советском Союзе.

Академик А. П. Александров — член Центрального комитета КПСС, депутат Верховного Совета СССР. Его исключительные заслуги высоко оценены Родиной: он трижды Герой Социалистического Труда, награжден многими орденами и медалями.

Свое восьмидесятилетие Анатолий Петрович встречает полным сил и энергии, и я уверен, что широкие круги советского народа, в том числе читатели нашего журнала, от души желают ему долгих лет плодотворной деятельности, благополучия и личного счастья.



В глубинах Вселенной.

Фрагмент картины художника А. Соколова.

Черные дыры

Доктор физико-математических наук
Я. А. СМОРОДИНСКИЙ

Общая теория относительности всегда поражала воображение своими предсказаниями удивительных явлений. Среди всех ее предсказаний рекорд побивает вывод, что во Вселенной могут существовать черные дыры — небесные тела с большой плотностью, в недра которых попадает, проваливается практически все, что находится в окрестности.

Пока еще трудно сказать, доказано ли существование черных дыр, и хотя о них естествоиспытатели рассуждали более 200 лет тому назад, основываясь на теории тяготения Ньютона, их поиски начались только в наши дни, когда поняли, что их можно «увидеть».

Если черные дыры — реальность, то для них есть дело во Вселенной: они могли бы взять на себя роль гигантских генераторов энергии, обеспечивающих эволюцию Вселенной. Может быть, такой генератор увидели недавно астрономы, получив фотографию центра нашей галактики. Наука о черных дырах только начинается. Каковы будут ее успехи и где нас ждут разочарования — сказать нельзя, но о свойствах черных дыр физики могут рассказать много интересного.

Движение тел в окрестности черной дыры

Рассмотрим небесное тело (звезду) с радиусом R и массой M .

Предположим, что никаких других тел поблизости нет и поле тяготения создается только им одним. Пусть какое-то другое тело (массу и радиус которого для простоты рассуждений будем считать малыми по сравнению с M и R соответственно), двигаясь из бесконечности, попадает в это поле тяготения. Согласно законам Кеплера, оно либо будет двигаться вокруг звезды по эллипсу, либо, придя из бесконечности, обогнет тело по параболе или гиперболе и уйдет обратно на бесконечность, навсегда покинув звезду.

Аналогично, если тело начинает свое движение с поверхности звезды, где ему сообщается некоторая скорость, то оно (если, конечно, не упадет на звезду) либо станет спутником звезды, либо навсегда покинет ее.

Чтобы покинуть звезду, тело должно иметь энергию, достаточную для совершения работы против сил тяготения. Другими словами, его кинетическая энергия $mv^2/2$ должна быть не меньше, чем GmM/R (ибо такова работа, которую надо затратить, чтобы тело массой m переместить с поверхности звезды в бесконечность*)):

$$\frac{mv^2}{2} \geq G \frac{mM}{R}.$$

Отсюда можно найти минимальную скорость, которая дает возможность телу покинуть звезду; ее называют второй космической скоростью:

$$v_{II} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}.$$

Если радиус звезды R уменьшается, а ее масса M остается неизменной, то скорость v_{II} увеличивается и становится сколь угодно большой, если R стремится к нулю. Другими словами, тело, падающее по прямой на точечную звезду, приобретает, формально, бесконечно большую скорость.

* См., например, Приложение I к статье К. Кикоина «Что такое потенциальная яма» («Квант», 1982, № 8) или п. 61 учебного пособия «Алгебра и начала анализа 9—10» (М., «Просвещение», 1982).

Такой результат противоречит утверждению теории относительности, что никакое тело не может иметь скорость, большую скорости света. Наша формула верна не всегда и ее можно использовать лишь тогда, когда скорость v_{II} оказывается много меньше скорости света c :

$$\sqrt{\frac{2GM}{R}} \ll c.$$

Это неравенство можно записать по-другому:

$$R \gg \frac{2GM}{c^2}.$$

Величина, стоящая в правой части, играет в теории важную роль и ей присвоено особое название — гравитационный радиус звезды:

$$R_{гр} = \frac{2GM}{c^2}.$$

Теперь условие применимости классической механики к описанию движений в поле тяготения небесных тел будет выглядеть так:

$$R \gg R_{гр}$$

Гравитационный радиус большинства небесных тел очень мал. Для Солнца он равен приблизительно 3 км, для Земли — 0,8 см, то есть он существенно меньше их линейных размеров ($R_c = 7 \cdot 10^5$ км, $R_z = 6,4 \cdot 10^3$ км). Так что обычно скорость тела, даже падающего из бесконечности на поверхность звезды (или планеты), очень мала:

$$v_{II} = \sqrt{\frac{R_{гр}}{R}} c \ll c.$$

Всегда ли это неравенство сохраняется или возможно, чтобы оно нарушилось? Конечно, возможно, но для этого нужно, прежде всего, чтобы радиус звезды — источника гравитационного поля — был бы по крайней мере равен гравитационному радиусу. Солнце, например, понадобилось бы для этого сжать приблизительно в 230 000 раз. Плотность его оказалась бы невообразимо большой: $\sim 2 \times 10^{19}$ кг/м³ (средняя плотность Солнца $\sim 1,4 \cdot 10^3$ кг/м³), большей, чем плотность атомного ядра (плотность атомных ядер $\sim 10^{17}$ кг/м³). Тем не менее именно такие объек-

ты и имеют в виду, когда говорят о черных дырах — сгустках невероятно сжатой материи.

Что же отличает поведение тел вблизи этих объектов? Если тело движется издалека, до тех пор пока расстояние r до него много больше гравитационного радиуса: $r \gg R_{гр}$, его движение подчиняется законам Кеплера. Если же тело попадает на более близкое расстояние такое, что отношение $R_{гр}/r$ оказывается не слишком малым, движение приобретает совсем другой характер. (Формальная причина этого состоит в том, что сила притяжения перестает подчиняться закону обратных квадратов — закону всемирного тяготения. А это сразу нарушает стройную классическую картину движения.) Наконец, в окрестности черной дыры, то есть на расстояниях, сравнимых с гравитационным радиусом, притяжение к черной дыре будет столь большим, что никакое тело не сможет пройти мимо — оно затягивается сю и исчезает в ее «черных» недрах. В классической ньютоновской механике комета, например, может пролететь сколь угодно близко от центра притяжения и все же уйдет от него в бесконечность. Черная же дыра собирает вокруг себя все, что пролетает сравнительно близко. Луч света и тот ведет себя необычным образом. Проходя около черной дыры, луч отклоняется столь сильно, что его траектория закручивается в спираль и, таким образом, он тоже захватывается черной дырой.

А может ли какое-нибудь тело (или хотя бы световой луч) покинуть черную дыру? Оказывается, нет, поскольку для того, чтобы вылететь наружу, недостаточно даже скорости света. Никакой энергии тела не хватит, чтобы преодолеть колоссальное гравитационное поле черной дыры.

Немного истории

У теории черных дыр есть давняя история. Неожиданная сторона ее состоит в том, что связь между радиусом и массой черной дыры была обнаружена двести лет назад. И хотя основания для этого открытия были ложными, оно заслуживает того, чтобы о нем рассказать.

В XVIII веке в Англии научные сообщения посылались в виде писем и зачитывались на заседаниях Королевского общества (так называлась Английская академия наук). Однажды такое письмо было послано одним из членов этого общества бакалавром богословия Джоном Мичеллом другому члену — знаменитому Генри Кавендишу*). Оно было зачитано на заседании 27 ноября 1783 года. Как теперь известно из записок Кавендиша, изданных Максвеллом, Кавендиш также обратил внимание на возможность существования объектов, которые мы сейчас называем черными дырами. Может быть, поэтому именно ему и сообщал о своих соображениях Мичелл.

Процитируем отрывок из его письма, которое было опубликовано в известном журнале *Philosophical Transactions* Королевского общества в 1784 году: «...если радиус шара, который имеет ту же плотность, что и Солнце, будет превышать радиус Солнца в отношении 500:1, то тело, падающее на шар с бесконечно большой высоты, приобретет на его поверхности скорость, превышающую скорость света. Можно заключить, предполагая, что свет, как и другие тела, притягивается с силой, пропорциональной массе, что свет, излучаемый таким шаром, будет принужден вернуться обратно из-за собственной тяжести». Так звучало первое теоретическое предсказание.

Откуда взял свою оценку Мичелл? Попробуем ответить на этот вопрос, решив обратную задачу — найдем, каким должно быть отношение радиусов рассматриваемого шара и Солнца, чтобы вторая космическая скорость для шара стала равной скорости света.

Будем исходить из выражения для второй космической скорости, в котором массу тела M выразим через его плотность ρ :

$$v_{II}^2 = \frac{2GM}{R} = \frac{8\pi G}{3} \rho R^2.$$

Отсюда видно, что при постоян-

ной плотности v_{II} пропорционально R . Следовательно, для того чтобы скорость v_{II} была равна скорости света c , радиус шара $R_{ш}$ должен быть во столько раз больше радиуса Солнца R_C , во сколько скорость света больше второй космической скорости для Солнца:

$$\frac{R_{ш}}{R_C} = \frac{c}{v_{II C}}.$$

Или, используя формулу $v_{II C} = \sqrt{R_{гpc}/R_C} c$, —

$$\frac{R_{ш}}{R_C} = \sqrt{\frac{R_C}{R_{гpc}}}.$$

Зная, что $R_C \approx 700\,000$ км, а $R_{гpc} \approx 3$ км, получаем для отношения радиусов значение ≈ 480 , что, действительно, близко к 500.

Заметим, что Мичелл, вычисляя вторую космическую скорость для Солнца, конечно же, не мог воспользоваться понятием гравитационного радиуса (в то время такого понятия просто не существовало). Как же он считал?

Мичелл знал скорость движения Земли вокруг Солнца: $v = 30$ км/с и отношение радиусов орбиты Земли R к радиусу Солнца R_C :

$$k = \frac{R}{R_C} \approx \frac{150 \cdot 10^6 \text{ км}}{0,7 \cdot 10^6 \text{ км}} \approx 214.$$

Согласно второму закону Ньютона, орбитальная скорость Земли

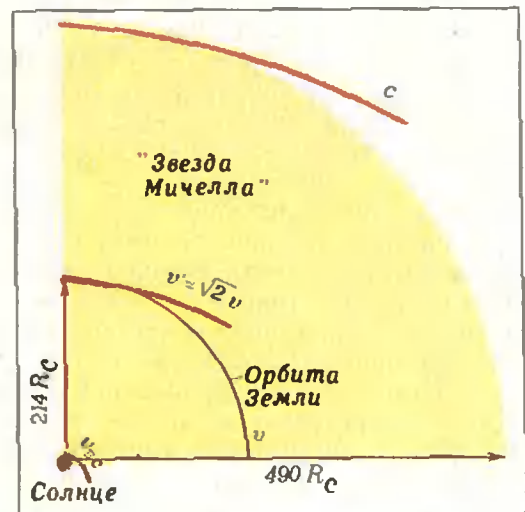
$$v = \sqrt{\frac{GM_C}{R}}.$$

Чтобы покинуть Солнечную систему с орбиты Земли, нужна скорость

$$v' = \sqrt{\frac{2GM_C}{R}}.$$

что в $\sqrt{2}$ раз больше скорости v .

Скорость, необходимая для того, чтобы



* Кавендиш был первым, кто изучал гравитационное притяжение тел в лаборатории и измерил гравитационную постоянную.

покинуть Солнечную систему с поверхности Солнца, то есть вторая космическая скорость для Солнца v_{nc} должна быть в \sqrt{k} раз больше скорости v' (эти скорости обратно пропорциональны корню квадратному из расстояния до центра Солнца).

Таким образом, отношение радиуса $R_{ш}$ «звезды (шара) Мичелла» к радиусу R_C Солнца равно

$$\frac{R_{ш}}{R_C} = \frac{c}{v_{nc}} = \frac{c}{\sqrt{2}v\sqrt{k}} \approx 500.$$

В чем же ошибочность рассуждений Мичелла? Он думал, что свет, преодолевая поле тяготения, теряет свою кинетическую энергию, то есть, согласно механике Ньютона, уменьшает свою скорость. Он даже предлагал измерять скорость света, исходящего от разных звезд, и определять таким образом массу звезд. Идея Мичелла, конечно, очень смелая, но, как мы сейчас знаем, неверная. У света нет кинетической энергии в обычном смысле этого слова. При совершении работы против поля тяготения звезды уменьшается энергия кванта света, что по формуле $E = h\nu$ означает, что уменьшается частота ν , а не скорость света. Это есть эффект «красного смещения» (то есть смещения спектральных линий в длинноволновую часть спектра) в гравитационном поле массивных тел. «Красное смещение» наблюдалось даже в земных условиях и было одним из первых подтверждений общей теории относительности.

В письме Мичелла есть еще одно замечательное место, относящееся к задаче о том, как можно было бы обнаружить несветящиеся объекты. Темные звезды — черные дыры — он надеялся найти в том случае, если они оказываются одной из компонент двойной звезды, изменяющей свою яркость, когда светящийся спутник затмевается, заходя в тень черной дыры.

Такое предположение оказалось пророческим. В наше время черные дыры пытаются найти именно в двойных системах, только не из измерений яркости, а по их рентгеновскому излучению. Источником этого излучения может быть поток вещества, которое перетекает к черной дыре со второй, светящейся компоненты двойной звезды. При падении в

черную дыру вещество разогревается до очень высокой температуры и излучает электромагнитные волны в рентгеновском диапазоне. Так, в пользу того, что двойная звезда Лебедь X-1 содержит черную дыру, говорят затмения в интенсивном рентгеновском излучении, зарегистрированные в созвездии Лебедя.

Через несколько лет, в 1796 году рассказ о черной дыре появился в «Изложении системы мира», написанном знаменитым французским математиком и астрономом Пьером Симоном Лапласом. Его рассказ почти совпал с тем, что писал Мичелл.

Рождение черных дыр

Откуда во Вселенной могли бы появиться черные дыры? Если они не возникли на самых ранних этапах эволюции Вселенной, о которых мы очень мало знаем, то они могли бы быть конечной стадией эволюции звезд.

Как и все тела природы, звезды не остаются неизменными, они рождаются, эволюционируют и, наконец, умирают. Вещество каждой звезды находится под действием двух типов сил — гравитационных, стремящихся сжать звезду, и сил давления звездного вещества, препятствующих этому сжатию. В состоянии равновесия эти силы уравновешены.

Давление внутри обычной звезды (типа нашего Солнца) поддерживается внутренними источниками энергии и поэтому тесно связано с ее температурой. Когда источники энергии начинают иссякать, звезда остывает, давление уменьшается, и радиус звезды начинает уменьшаться — она сжимается под действием сил тяготения. Этот процесс продолжается до тех пор, пока какие-то другие силы, отличные по своей природе от гравитационных, не воспрепятствуют дальнейшему сжатию звезды.

Исход этого процесса зависит от массы звезды. Если масса звезды примерно такая, как у Солнца, сжатие будет происходить до тех пор, пока не начнут разрушаться элек-

тронные оболочки атомов — звезда превратится в холодный белый карлик. Если масса звезды несколько больше, примерно две-три солнечных массы, то гравитационные силы окажутся достаточно сильными, чтобы «раздавить атомы» и загнать электроны внутрь ядер, превратив протоны в нейтроны. Звезда превратится в нейтронную звезду.

Но если масса звезды будет превышать 3—5 масс Солнца, то, начав сжиматься, она не сможет остановить своего сжатия до тех пор, пока не превратится в бездонную пропасть — черную дыру.

Так могут возникнуть эти странные объекты. Вопрос только в том, реализуется ли на самом деле во Вселенной такой процесс, может ли в процессе эволюции звезда сохранить столь большую массу, избегав взрывов и разрушений, чтобы реально достичь неизбежного превращения в черную дыру.

Излучение черных дыр

Как мы уже говорили, из недр черной дыры не выходит ничего, поэтому она и называется черной. Тем не менее место черной дыры дает себя знать по мощному потоку излучения. Далекие небесные тела — квазары, расположенные от нас на расстоянии миллиардов световых лет, излучают энергию, в сотни раз превышающую энергию, которую выделяют целые галактики. Что происходит в этих областях — мы не знаем. Существует гипотеза, что источниками энергии являются гигантские черные дыры, масса которых превышает массу Солнца в 10^6 — 10^9 раз и которые родились вместе со Вселенной. К сожалению, проверить эту гипотезу очень трудно.

Астрономы предполагают, что в центре нашей Галактики находится черная дыра с массой около 10^6 масс Солнца. Вокруг нее обращается другое тело — примерно такой же (или даже большей) массы, но с большим радиусом. В этой системе возникают потоки вещества, устремляющиеся в направлении черной дыры. Это и маленькие частицы, и

большие тела — осколки звезд, разорванных огромными гравитационными силами черной дыры. Они порождают потоки гравитационных и электромагнитных волн.

Излучая энергию, частицы все время приближаются к поверхности черной дыры и при этом теряют свою кинетическую энергию. Но запас этой энергии все время восполняется за счет уменьшения потенциальной энергии. (Потенциальную энергию на поверхности черной дыры можно оценить по ньютоновской формуле:

$$E_n = -G \frac{mM}{R_{гд}} = -\frac{1}{2} mc^2.$$

При вычислении по формулам общей теории относительности коэффициент $1/2$ исчезает.) Поэтому тело, падающее с бесконечно большого расстояния (когда $E_n = 0$), имеет запас энергии, равный сумме кинетической энергии $mv^2/2$ (при условии, что $v \ll c$) и энергии покоя mc^2 . В процессе падения этот запас практически полностью тратится.

Таким образом, с теоретической точки зрения черная дыра оказывается механизмом, который способен «перерабатывать» в излучение всю энергию частиц, включая и энергию покоя. Такой «двигатель», способный работать с коэффициентом полезного действия очень близким к единице, уникален. Было бы несправедливым, если бы природа нигде не реализовала эту возможность.

* * *

Итак, у черных дыр могут быть разные облики. Либо это грустные остатки звезд, некогда блиставших во всем своем великолепии, либо это гигантские «энергетические станции», с которыми связано само существование Вселенной.

Комплексные числа

Академик Л. С. ПОНТЯГИН

Здесь я прежде всего очень кратко рассказываю о том, как возникли в математике и постепенно утвердились в ней комплексные числа. Затем даю определение комплексных чисел, действий над ними и их геометрическую интерпретацию. Полутно доказываются формулы косинуса и синуса суммы, тесно связанные с умножением комплексных чисел.

Историческая справка

Из курса математики известно, что отрицательные числа введены прежде всего для того, чтобы операция вычитания, обратная к операции сложения, была всегда возможна. По аналогичной причине в математике появились комплексные числа. Если рассматривать только действительные числа, то операция извлечения квадратного корня, обратная к операции возведения в квадрат, не всегда возможна, так как нельзя извлечь квадратный корень из отрицательного числа. Этого, однако, недостаточно, чтобы заводить в математике новые числа. Оказалось, что если производить вычисления по обычным правилам над выражениями, в которых встречается корень квадратный из отрицательного числа, то можно прийти к результату, уже не содержащему корень квадратный

из отрицательного числа. В XVI веке Кардано нашел формулу для решения кубического уравнения («Квант», 1976, № 9, с. 2). Оказалось, что именно в том случае, когда кубическое уравнение имеет три действительных корня, в формуле Кардано встречается корень квадратный из отрицательного числа (там же, с. 11). Обнаружилось таким образом, что, производя вычисления с выражениями, содержащими корень квадратный из отрицательного числа, можно получить вполне понятные результаты. Поэтому эти корни стали употреблять в математике. Назвали их мнимыми числами — тем самым они как бы приобрели право на нелегальное существование. Полные гражданские права мнимым числам на грани XVIII—XIX столетий дал Гаусс («Квант», 1977, № 8, с. 2), который назвал их комплексными числами, дал им геометрическую интерпретацию и, что самое главное, доказал основную теорему алгебры, утверждающую, что каждый многочлен имеет хотя бы один действительный или комплексный корень.

Определение комплексных чисел

Мы будем исходить из того, что действительные числа нам известны. Мы знаем, что для них определены два основных действия — сложение и умножение — и имеются обратные к ним действия — вычитание и деление. Для этих действий выполняются хорошо известные правила, которые обычно употребляются совершенно автоматически — поэтому я их не буду здесь формулировать. Множество объектов, для которых определены действия сложения и умножения и обратные к ним действия вычитания и деления, причем выполнены обычные правила, имеющие место для действительных чисел, называется в современной абстрактной алгебре *полем*.

Таким образом, с точки зрения современной абстрактной алгебры множество \mathbb{R} всех действительных чисел представляет собой поле. Поставим теперь перед собой задачу расширить понятие числа или, как

Статья публиковалась в журнале «Квант» № 3 за 1982 год. Перепечатывается в связи с замеченными опечатками.

говорят в абстрактной алгебре, расширить поле \mathbb{R} до поля K таким образом, чтобы в этом новом поле K уравнение

$$z^2 + 1 = 0 \quad (1)$$

имело решение. Элемент поля K , который удовлетворяет уравнению (1), мы обозначим через i . Таким образом, для i имеем

$$i^2 = -1. \quad (2)$$

Так как поле K содержит все действительные числа и элемент i и так как в нем возможны действия сложения и умножения, в поле K должны содержаться всевозможные многочлены относительно i с действительными коэффициентами, в частности — все многочлены первой степени, то есть выражения вида

$$z = x + yi = x + iy,$$

где x и y — действительные числа. Эти выражения и называются *комплексными числами*. Действия над ними мы определим как действия над многочленами, учитывая при этом условие (2). Комплексные числа вида

$$z = x + 0i = x$$

являются действительными числами. Комплексные числа вида

$$z = 0 + yi = yi$$

называются *чисто мнимыми числами*.

Пусть $z_1 = x_1 + y_1i$, $z_2 = x_2 + y_2i$ — два комплексных числа. Согласно высказанному правилу сумма и произведение этих комплексных чисел определяются равенствами

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (x_1 + y_1i) + (x_2 + y_2i) = \\ &= (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i; \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (x_1 + y_1i)(x_2 + y_2i) = \\ &= x_1 x_2 + (x_1 y_2 + y_1 x_2)i + y_1 y_2 i^2 = \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + y_1 x_2)i. \end{aligned} \quad (4)$$

При получении последнего равенства мы использовали условие (2).

В случае, если число $z_1 = x_1$ — действительное, получаем

$$x_1 z_2 = x_1 x_2 + x_1 y_2 i. \quad (5)$$

Из формул (3) и (4) видно, что сумма и произведение двух комплексных чисел есть также комплексное число.

Для того чтобы убедиться, что действие вычитания, обратное действию сложения, существует, достаточно найти число $-z$, противоположное числу z , а для того чтобы убедиться в том, что возможно деление, достаточно для $z \neq 0$ указать число z^{-1} , обратное числу $z = x + yi$. Числа эти, как легко видеть, задаются формулами

$$-z = -x - yi,$$

$$z^{-1} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2} i.$$

Таким образом, величина z^{-1} , обратная к z , существует всегда, когда $z \neq 0$.

Геометрическое изображение комплексных чисел

Обозначим через P плоскость нашего чертежа и выберем на ней прямоугольную систему координат (рис. 1). Комплексное число $z = x + yi$ мы поместим в точку $z = (x; y)$ с координатами x, y . Обозначим также через z вектор, идущий из начала координат O в точку z . Таким образом, буква z обозначает у нас одновременно комплексное число, точку z , изображающую это комплексное число, и вектор z , соответствующий этому комплексному числу. При этом изображении действительные числа попадают на ось абсцисс — поэтому ось абсцисс называется *действительной осью* плоскости P комплексного переменного, а чисто мнимые числа попадают на ось ординат — поэтому ось ординат называется *мнимой осью* плоскости P комплексного переменного. Нуль попадает в начало координат.

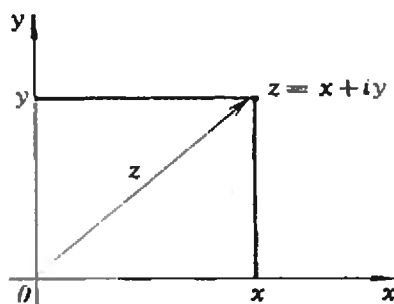


Рис. 1.

Длина вектора z называется *модулем* комплексного числа $z = x + yi$ и обозначается $|z|$:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Комплексные числа z , удовлетворяющие условию $|z| = 1$, составляют окружность радиуса 1 с центром в начале координат. На этой окружности лежит число 1. Из точки 1 отложим по окружности дугу заданной длины φ в направлении против часовой стрелки. Конец этой дуги обозначим через (φ) . Если φ — отрицательное число, то для получения (φ) нужно отложить от точки 1 длину дуги $|\varphi|$ по часовой стрелке. Как известно, абсцисса точки (φ) называется $\cos \varphi$, а ее ордината $\sin \varphi$. Таким образом, комплексное число (φ) задается формулой

$$(\varphi) = \cos \varphi + i \sin \varphi. \quad (6)$$

Итак, всякое комплексное число z , по модулю равное 1, записывается в виде (6). Если z — произвольное комплексное число, модуль которого $|z| = \rho$ отличен от 0, то число z/ρ является комплексным числом, по модулю равным 1, и поэтому записывается в виде (6). Из равенства

$$\frac{z}{\rho} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

мы получаем

$$z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi). \quad (7)$$

Запись (7) называется *тригонометрической формой* комплексного числа. Число φ называется *аргументом* комплексного числа. Если модуль ρ комплексного числа z отличен от нуля, то аргумент φ определен с точностью до слагаемого $2\pi k$, где k — целое число. Если же модуль ρ комплексного числа равен 0, то формула (7) также имеет место, однако в этом случае аргумент комплексного числа вовсе не определен.

Числа ρ и φ называются *полярными координатами* точки z .

Дадим теперь геометрическое истолкование действий над комплексными числами.

Из формул (3) и (5) следует, что комплексные числа складываются и умножаются на действительные числа, как векторы.

Геометрический смысл сложения комплексных чисел очевиден: вектор $z_1 + z_2$ — это диагональ параллелограмма, построенного на векторах z_1 и z_2 . Отсюда вытекает важное неравенство:

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|. \quad (8)$$

Для того чтобы дать геометрическое истолкование умножения комплексных чисел, нужно употребить операцию поворота вектора или, что то же самое, комплексного числа. Повернув вектор z против часовой стрелки на угол α , мы получим некоторый новый вектор, который обозначим через $R_\alpha(z)$. Геометрически ясно, что операция поворота R_α имеет следующее свойство: если α — действительное число, то

$$R_\alpha(az) = aR_\alpha(z),$$

$$R_\alpha(z_1 + z_2) = R_\alpha(z_1) + R_\alpha(z_2).$$

Из этих двух формул следует, что если a_1 и a_2 — два действительных числа, то имеет место соотношение

$$R_\alpha(a_1 z_1 + a_2 z_2) = a_1 R_\alpha(z_1) + a_2 R_\alpha(z_2). \quad (9)$$

Непосредственно ясно также, что

$$R_\alpha(1) = \cos \alpha + i \sin \alpha. \quad (10)$$

Докажем теперь, что поворот комплексного числа $z = x + yi$ на угол α равносильен умножению его на комплексное число $\cos \alpha + i \sin \alpha$, то есть что

$$R_\alpha(z) = (\cos \alpha + i \sin \alpha)z. \quad (11)$$

Для этого рассмотрим сначала отдельно поворот на угол $d = \frac{\pi}{2}$.

В этом случае $\cos d + i \sin d = i$, и равенство (11) принимает вид $R_d(z) = iz$. С одной стороны, геометрически очевидно, что $R_d(1) = i$, $R_d(i) = -1$. С другой стороны, $i \cdot 1 = i$, $i \cdot i = -1$. Таким образом,

$$R_d(1) = i \cdot 1, \quad R_d(i) = i \cdot i.$$

Из формулы (9) непосредственно вытекает

$$\begin{aligned} iz &= i \cdot (x+iy) = x \cdot i + y(-1) = \\ &= xR_{\alpha}(1) + yR_{\alpha}(i) = R_{\alpha}(x \cdot 1 + y \cdot i) = \\ &= R_{\alpha}(x+iy) = R_{\alpha}(z). \end{aligned}$$

Таким образом, формула (11) доказана для $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Пусть теперь α — произвольное действительное число. При $z = \cos \alpha + i \sin \alpha$ получаем

$$\begin{aligned} z \cdot i &= iz = R_{\alpha}(z) = R_{\alpha}(\cos \alpha + i \sin \alpha) = \\ &= \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \\ &= R_{\alpha}\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right) = R_{\alpha}(i). \end{aligned} \quad (12)$$

Таким образом, формула (11) доказана при $z = i$.

Перейдем теперь к доказательству формулы (11) для произвольного комплексного числа

$$z = x + iy.$$

В силу формул (9), (10), (12) имеем

$$\begin{aligned} R_{\alpha}(z) &= R_{\alpha}(x+iy) = xR_{\alpha}(1) + yR_{\alpha}(i) = \\ &= x(\cos \alpha + i \sin \alpha) + \\ &+ y(\cos \alpha + i \sin \alpha)i = \\ &= (\cos \alpha + i \sin \alpha)(x+iy) = \\ &= (\cos \alpha + i \sin \alpha)z. \end{aligned}$$

Таким образом, формула (11) полностью доказана.

Применяя формулу (11) к комплексному числу $z = \cos \beta + i \sin \beta$, получаем

$$\begin{aligned} (\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta + i \sin \beta) &= \\ &= R_{\alpha}(\cos \beta + i \sin \beta) = R_{\alpha}(R_{\beta}(1)) = \\ &= R_{\alpha+\beta}(1) = \cos(\alpha+\beta) + i \sin(\alpha+\beta). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} (\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta + i \sin \beta) &= \\ &= \cos(\alpha+\beta) + i \sin(\alpha+\beta). \end{aligned}$$

Производя перемножение комплексных чисел, стоящих в левой части, по формуле (4), мы получим

$$\begin{aligned} (\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta + i \sin \beta) &= \\ &= (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) + \\ &+ (\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta)i. \end{aligned}$$

Значит, мы получили формулы для косинуса и синуса суммы:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha+\beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta, \\ \sin(\alpha+\beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta. \end{aligned}$$

Для произвольных комплексных чисел, которые мы запишем в виде $r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$, $s(\cos \beta + i \sin \beta)$, получаем

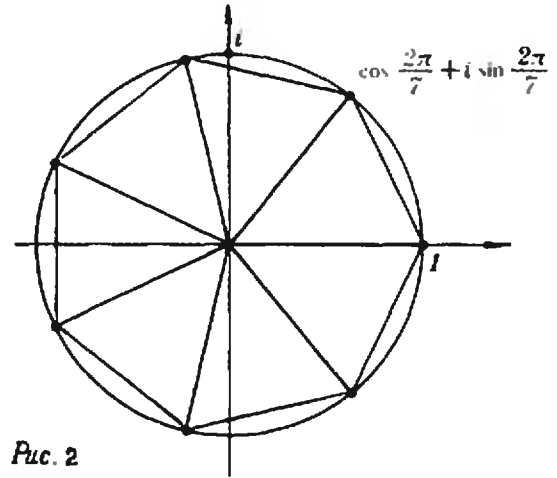


Рис. 2

$$\begin{aligned} r(\cos \alpha + i \sin \alpha) \cdot s(\cos \beta + i \sin \beta) &= \\ &= rs(\cos(\alpha+\beta) + i \sin(\alpha+\beta)). \end{aligned} \quad (13)$$

Таким образом, при перемножении двух комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются.

Формулу (13) очевидным образом можно распространить на произвольное число сомножителей. Если все эти сомножители равны между собой и равны комплексному числу $r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$, то мы получаем

$$\begin{aligned} [r(\cos \alpha + i \sin \alpha)]^n &= \\ &= r^n (\cos n\alpha + i \sin n\alpha). \end{aligned}$$

Эта формула очень интересна. Она дает возможность извлечь корень n -й степени из произвольного комплексного числа $\varrho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$. Именно, оказывается, что число корней n -й степени из числа $\varrho(\cos \varphi + i \sin \varphi) \neq 0$ равно n , причем корни эти расположены на окружности радиуса $\sqrt[n]{\varrho}$ с центром в начале координат и составляют вершины правильного n -угольника. Это утверждение я предоставляю для доказательства читателям.

В частности, корень n -й степени из единицы имеет n значений, которые являются вершинами правильного n -угольника, вписанного в единичный круг, причем одна из его вершин есть единица (рис. 2). В виде формулы эти корни записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{1} &= \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \\ &(k=0, 1, 2, \dots, n-1). \end{aligned}$$



Холодный взрыв

Доктор физико-математических наук
М. А. КОЖУШНЕР

В 1980 году исследователи из Института химической физики АН СССР открыли новое интересное явление: способная к химической реакции смесь взрывалась не при нагревании, а при охлаждении.

Взрыв смеси метилциклогексана и хлора происходил при температурах около 10 К.

Всем известно, что холод замедляет химические процессы, а интенсивные реакции — взрывы — происходят при нагревании. Химическая реакция, приводящая к обычному тепловому взрыву, как правило, протекает по цепному механизму: смесь подогревается и при определенной температуре в результате взаимодействия молекул число реагирующих частиц (радикалов) в смеси лавинообразно возрастает. При этом столь же стремительно усиливается выделение тепла. Если выделяемое при реакции тепло не успевает отводиться, то температура смеси будет так быстро возрастать, что реакция приобретет характер взрыва.

Холодный взрыв происходил по такому же цепному механизму. Начальные радикалы — химически активные атомы хлора создавались с помощью лазера: квант света разбивал молекулу хлора на два атома. Далее смесь быстро охлаждалась, образуя аморфное стекло. В интервале температур от 60 К до 10 К начинался взрыв. Чем ниже была исходная концентрация радикалов, тем при более низкой температуре смесь взрыва-

лась. Более того, нагревание тормозило реакцию.

В чем же причина столь парадоксального явления? Авторы эксперимента объясняют его наличием в образце деформаций сжатия, которые возникают как при быстром замораживании смеси, так и в процессе самой реакции.

Известно, что при высоких температурах энергия химически активных частиц велика и они могут сближаться настолько, что становится возможным химическое взаимодействие между ними. В твердых телах можно добиться сближения между химически активными частицами за счет деформаций. При этом чем выше температура, тем быстрее рассасываются (релаксируют) деформации. Их энергия переходит в тепловую. При пониженной температуре деформации, напротив, не успевают релаксировать, а накапливаются лавинообразно, и реакция начинает идти с возрастающей скоростью. Возникает холодный взрыв (его можно было бы назвать деформационным).

Но каким же образом при низких температурах (всего лишь на несколько градусов выше абсолютного нуля!) реагирующие молекулы смогут вступить в реакцию? Ведь при столь тесном сближении они начинают отталкиваться, а вблизи абсолютного нуля движение молекул замедляется и их энергии недостаточно для преодоления сил отталкивания. Существует, как говорят, энергетический барьер, для преодоления которого требуется достаточная кинетическая энергия. Однако при низких температурах в поведении частиц все явственнее начинают проявляться квантовые закономерности, в частности, так называемый туннельный эффект. Он заключается в том, что частицы могут преодолевать энергетические барьеры, не обладая превышающей такие барьеры энергией, — образно говоря, проходят не поверх барьера, а сквозь него, как бы по туннелю, сближаясь до расстояний, при которых начинается реакция. Этот эффект, видимо, и делает возможным холодный взрыв.



Давайте нагреем воду сверху

В. И. ПЕНТЕГОВ

Люди ежедневно греют воду и почти всегда нагреватель помещают внизу, под сосудом с водой. Это и понятно — конвекция жидкости, происходящая по всему объему сосуда, обеспечивает равномерное прогревание всей жидкости до необходимой температуры.

А что будет, если расположить нагреватель сверху? Этот вопрос не праздный. Вспомним, что 70% земной поверхности покрыто водой, для которой основным источником энергии является Солнце. Так что в природе в огромных масштабах происходит нагрев воды именно сверху. Многие процессы, связанные с этим, настолько сложны, что до сих пор нет единого мнения об их причинах. Например, относительно недавно было установлено, что температура воды в океане меняется с глубиной не плавно, а скачками. Эти скачки происходят в очень узком промежутке между слоями, в которых температура постоянна. Внутри каждого слоя постоянны также плотность и «соленость» (процентное содержание соли) воды. С течением времени скачки сглаживаются (при этом выравнивание температур происходит значительно быстрее, чем выравнивание «солености»), но гра-

ницы между слоями не перемещаются и сохраняются практически все время. Естественно спросить, почему так происходит. Но прежде чем попытаться разобраться в этом, проведем несколько опытов и наблюдений.

Две разные жидкости: вода и ... вода

Возьмем трехлитровую банку с водой и кипятыльник. Погрузим кипятыльник неглубоко в воду (рис. 1), включим его в сеть и подождем, пока вода в верхней части банки закипит или будет близка к кипению (от кипятыльника в этот момент начнут отрываться крупные пузырьки). Теперь подкрасим воду чернилами. Мы увидим, что в жидкости образовались две зоны: одна (верхняя) — окрашенная, другая (нижняя) — чистая; между ними четкая граница, через которую молекулы красителя не проникают (рис. 2,а). Измерения температуры воды в этих зонах дают следующие результаты: вверху температура всюду одна и та же и близка к температуре кипения $\approx 95^\circ\text{C}$, а внизу температура не поднимается выше $40\text{--}45^\circ\text{C}$. Это означает, что на границе этих двух участков существует скачок температуры ($\Delta T \approx 50\text{--}60^\circ\text{C}$), а вода в верхнем и нижнем участках ведет себя как две разные несмешивающиеся жидкости.

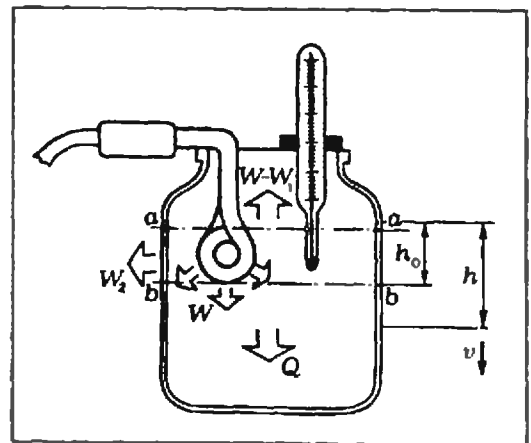


Рис. 1. Схема установки.

Когда Всеволод Пентегов написал эту статью, он был учеником 10 класса 145 средней школы г. Киева. Сейчас Всеволод студент Московского физико-технического института.



Рис. 2. а) Две зоны в жидкости. Здесь и на других фотографиях черные точки под верхней зоной — это пузырьки воздуха на стенках банки. б) Волны на границе. в) Прохождение вихревого кольца через границу.

Волны под водой

Из фотографии, приведенной на рисунке 2.б, видно, что на поверхности раздела могут возникать поперечные волны. (Кстати сказать, границу можно видеть и без подкрашивания — из-за рассеивания и отражения света от волн на ней.) Следовательно, граница обладает поверхностным натяжением. Наглядной иллюстрацией этого может служить, например, отражение вихревых колец от границы.

Отключим нагреватель (чтобы уменьшить перемещение жидкости в горячем слое) и капнем чернилами из пипетки с высоты 1—2 см над уровнем воды. В воде образуется вихревое кольцо, движущееся вниз. Если энергия кольца не очень велика, оно упруго отразится от границы (при этом граница несколько прогнется), а затем разрушится; если же энергия кольца достаточно большая, оно может пройти через границу, но сразу же после этого разрушится (рис. 2.в).

Движущаяся граница

Понаблюдав за поверхностью раздела различных слоев жидкости некоторое время, мы обнаружим, что она движется. Экспериментальные графики зависимости толщины верхнего слоя воды h от времени t и скорости движения границы v от толщины верхнего слоя, точнее — от разности уровней $h-h_0$ (см. рис. 1), приведены на рисунках 3 и 4 (измерения проводились для 3-х литровой банки при мощности нагревателя $P \approx 120$ Вт).

Обратим внимание на то, что заметное движение границы происходит только тогда, когда температура верхнего слоя близка к температуре кипения или равна ей — стоит только отключить нагреватель, как движение границы прекращается. Можно предположить, что движение границы есть следствие интенсивного перемешивания в горячем слое (которое возникает именно при высоких температурах). Чтобы проверить это, проведем следующее. Отключим нагреватель (при этом движение границы прекратится) и начнем каким-нибудь механическим способом осторожно перемешивать воду в верхнем слое. Как мы и ожидали, граница снова начнет двигаться.

Опираясь на приведенные факты, можно предложить такое объяснение движения границы. Рассмотрим поверхность раздела слоев горячей и холодной воды в некоторый момент времени и выделим на ней очень малый участок (рис. 5.а; здесь красные точки изображают молекулы горячей воды, синие — холодной). В результате процесса диффузии и соударений молекул под поверхностью раздела появляются «горячие» молекулы. Тонкий слой воды становится горячим и через некоторое время «смывается» конвективными потоками горячей воды (рис. 5.б и в). Этот микропроцесс и приводит к движению границы вниз.

Итак, в случае нагрева жидкости сверху тепло передается не только с помощью теплопроводности (что совершенно естественно), но и благо-

даря движению границы, обусловленному конвекцией жидкости в горячем слое. При этом конвекция обеспечивает практически одинаковую температуру во всех точках верхней зоны.

Попробуем ответить еще на один вопрос, возникающий при проведении опытов: зависит ли движение границы от мощности нагревателя?

Очевидно, что толщина верхнего слоя не может быть меньше глубины уровня $a-a$ (см. рис. 1), так как выше всегда происходит конвекция. В то же время вначале она не может быть больше глубины уровня $b-b$, так как ниже конвекции еще нет (при плоском или точечном нагревателе уровни $a-a$ и $b-b$ совпадают). Следовательно, существует некоторая начальная толщина верхнего слоя, определяемая, в основном, глубиной погружения нагревателя. Движение границы начинается с началом интенсивного перемещения жидкости в этом слое. Как уже говорилось, это происходит при температуре, близкой к температуре кипения. Значит, нагреватель должен обеспечить нагрев слоя жидкости начальной толщины практически до кипения при наличии потерь тепла в окружающее пространство. Это условие и определяет минимальную мощность на-

гревателя, при которой начинается движение границы.

Как показали опыты, при мощностях нагревателя, больших минимальной, скорость движения границы будет линейно зависеть от мощности (подробнее об этом сказано в Приложении к статье).

Итоги экспериментов

Из приведенных опытов можно сделать несколько основных выводов. Вот они:

1) Граница раздела между теплой и холодной водой может существовать длительное время, не разрушаясь, только при наличии конвективных потоков жидкости у границы: эти потоки ликвидируют последствия диффузии, сохраняя границу.

2) Граница движется, и скорость ее движения зависит от перепада температур. При уменьшении перепада скорость уменьшается вплоть до остановки границы, но сама граница при этом сохраняется, если сохраняются течения жидкости у границы.

3) Большие перепады температур (и высокое значение температуры нагретой воды) в проведенных опытах были необходимы только затем, чтобы в горячей жидкости возникали конвекционные течения доста-

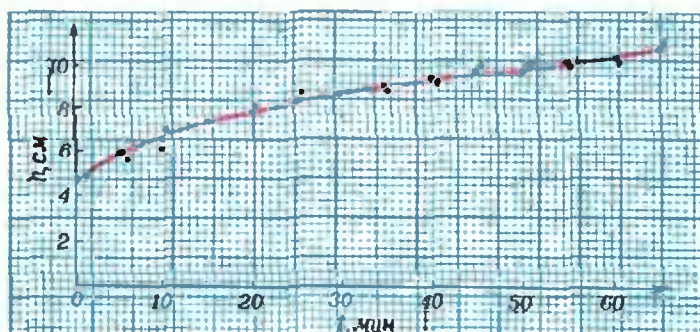


Рис. 3. График зависимости толщины верхней зоны h от времени t (по результатам двух опытов).

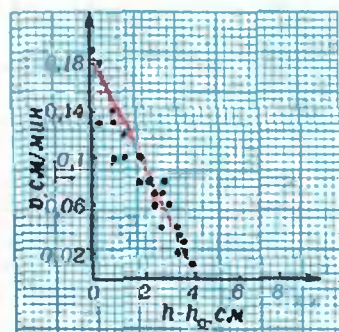


Рис. 4. График зависимости скорости движения границы v от глубины $h-h_0$ (по результатам двух опытов).

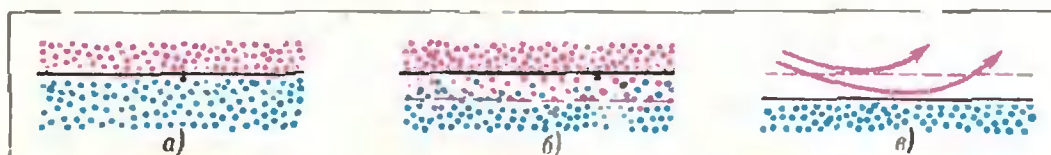


Рис. 5. К объяснению механизма движения границ.

точной интенсивности. Если движение жидкости по одну или обе стороны границы обеспечивается каким-либо другим путем, например механическим, то перепад температур может быть и небольшим.

Догадки и предположения

Теперь вернемся к разговору о нагревании солнечными лучами воды в океане и попытаемся ответить на некоторые вопросы. Почему границы между различными слоями в океане с течением времени не перемещаются, хотя происходит постепенное выравнивание температуры и «солености»? Почему выравнивание «солености» происходит существенно медленнее, чем выравнивание температуры?

Объяснить это можно опять-таки конвекцией, которая в океане существует во всех слоях (а не только в горячем слое, как в наших опытах).

Рассмотрим два соседних слоя. В результате диффузии и соударений между молекулами по обе стороны границы раздела оказываются как «холодные», так и «горячие» молекулы. Они подхватываются конвективными потоками и уносятся от границы. При этом, если конвекция одинаково интенсивна с обеих сторон границы, сама граница не движется, хотя передача энергии происходит и температуры постепенно уравниваются.

Что касается выравнивания «солености» воды, то этот процесс идет гораздо медленнее. Связано это с поверхностным натяжением, которым обладает граница раздела. Известно, что коэффициент поверхностного натяжения раствора соли больше, чем чистой воды. Граница, как и всякая физическая система, стремится иметь минимальную поверхностную энергию. Поэтому ионы, на которые в воде распадаются молекулы соли, в большинстве своем находятся вдалеке от границы, и их диффузия начнет заметно проявлять себя только тогда, когда поверхностное натяжение границы существенно уменьшится.

Возникновением границы между теплой и холодной водой можно, наверное, объяснить не только слоистость океана. Возможно, что это явление объяснит существование четких и устойчивых границ океанических течений и недавно открытых гигантских вихрей в океане, а также многое-многое другое.

Приложение

Обозначим через W мощность нагревателя (пусть она больше минимальной). Некоторая часть этой мощности тратится на испарение жидкости, но если температура постоянна, то эти потери тоже постоянны. Поэтому для удобства введем величину W_1 , равную разности мощности нагревателя и мощности, идущей на испарение жидкости и будем считать ее постоянной.

Естественно предположить, что мощность W_2 , отдаваемая в окружающее пространство через боковую поверхность сосуда, пропорциональна толщине h горячего слоя: $W_2 = kh$. Коэффициент пропорциональности k зависит только от условий эксперимента и во время опыта не изменяется.

Пусть за время dt граница переместилась на расстояние dh . Это значит, что слой жидкости толщиной dh нагрелся от температуры холодного слоя до температуры горячего слоя, то есть на ΔT градусов. На это требуется количество теплоты $dQ = c\rho S\Delta T dh = k_1 dh$ (здесь c — удельная теплоемкость жидкости, ρ — ее плотность, S — площадь горизонтального сечения сосуда).

Согласно закону сохранения энергии,

$$W_1 dt = dQ + W_2 dt,$$

или

$$W_1 dt = k_1 dh + kh dt.$$

Перепишем это равенство по-другому:

$$\frac{dh}{W_1 - kh} = \frac{dt}{k_1},$$

проинтегрируем его и получим зависимость толщины горячего слоя h от времени t :

$$h = a - be^{-at},$$

где $a = W_1/k_1$, $b = W_1/k - h_0$ и $\alpha = k/k_1$ — постоянные коэффициенты, h_0 — начальная глубина, на которой образуется граница.

Теперь найдем скорость движения границы v :

$$v = \frac{dh}{dt} = \frac{W_1 - kh}{k_1}.$$

Отсюда видно, что скорость границы линейно зависит от толщины слоя, причем при некоторой толщине (равной W_1/k) скорость должна стать равной нулю. Это происходит потому, что по мере увеличения толщины растут потери энергии и должен наступить момент, когда вся энергия от нагревателя будет уходить в окружающее пространство. В момент остановки границы конвективные потоки вблизи нее ослабевают настолько, что перемещение жидкости практически прекращается, и за счет диффузии и теплопроводности граница будет постепенно «рассасываться».

Уравнение газового состояния

В. Е. БЕЛОНУЧКИН

Уравнение состояния идеального газа (или просто уравнение газового состояния, или уравнение Менделеева — Клапейрона) описывает связь между параметрами состояния — давлением, температурой и объемом — одной из простейших физических систем. Прост объект, поэтому и уравнение его состояния достаточно просто:

$$pV = \frac{m}{\mu} RT,$$

где p — давление газа, V — его объем, m — масса, μ — молярная масса, T — температура, а R — универсальная газовая постоянная.

Итак, согласно уравнению, давление идеального газа пропорционально его температуре. Как это надо понимать? Означает ли это, например, что всегда при повышении температуры давление газа растет, а при понижении температуры — падает? Конечно, нет. Это безусловно справедливо, только если не меняются ни объем, ни масса, ни молярная масса. Даже для фиксированной массы определенного газа с ростом температуры давление может не расти, а падать, если при этом занимаемый газом объем достаточно быстро растет. Возможны и другие ситуации. Пожалуй, удобнее всего их обсудить на конкретных задачах (все задачи взяты из билетов приемных экзаменов в Московский физико-технический институт).

Задача 1. Температура и давление некоторой массы идеального газа изменяются, как показано на ри-

сунке 1. Изменяется ли занимаемый газом объем? Как именно?

Как видно из рисунка, давление с ростом температуры линейно возрастает. Может быть, при этом объем остается постоянным? Если нет, то как отличить график процесса, при котором объем не меняется?

При неизменном объеме давление не просто растет с ростом температуры, а растет прямо пропорционально температуре. А график прямой пропорциональной зависимости отличается от других линейных графиков тем, что проходит через начало координат. Таким образом, на диаграмме в p — T координатах изохора — прямая, проходящая через начало координат.

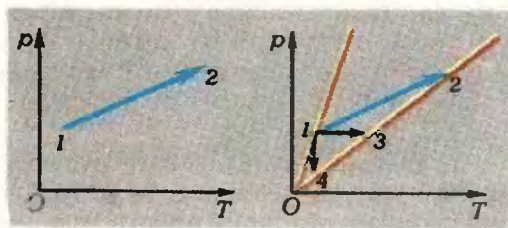


Рис. 1.

Рис. 2.

Проведем изохоры через интересующие нас точки 1 и 2 (рис. 2). Изохоры разные; значит, в состояниях 1 и 2 объемы различны. Какой из них больше? Проще всего это определить при помощи графика. Соединим эти две изохоры, например, изобарой 1—3 (или изотермой 1—4, или любой другой изобарой или изотермой). На участке 1—3 температура увеличивается при постоянном давлении. Ясно, что при этом объем должен расти.

Итак, точка 2 лежит на изохоре с большим объемом, то есть при переходе из состояния 1 в состояние 2 объем газа увеличился.

А не может ли все-таки график на рисунке 1 изображать процесс с постоянным объемом? Впрочем, давайте уточним вопрос.

Задача 2. В сосуде постоянного объема находится гелий. К сосуду присоединены манометр и термометр. Показания приборов меняются в соответствии с рисунком 1. Что можно сказать о состоянии газа?

В частности, давление в сосуде выше или ниже атмосферного?

В данном случае объем газа не меняется, а давление не пропорционально температуре. Возможно ли такое?

Обратимся к уравнению Менделеева — Клапейрона. Кроме параметров p , V и T в нем фигурируют еще m и μ . Молярная масса гелия μ измениться не должна — гелий газ одноатомный и диссоциировать не может. Конденсации тоже не должно быть, поскольку температура растет. По-видимому, единственная возможность — изменение массы m газообразного гелия.

Так как давление растет медленнее, чем было бы при изохорном процессе для неизменной массы, масса газа должна уменьшаться; то есть газ должен вытекать из сосуда. А это означает, что давление в сосуде больше атмосферного, иначе бы газ не вытекал.

Уравнение Менделеева — Клапейрона позволяет сравнивать не только различные состояния одного газа, но и состояния различных газов. Вот пример.

Задача 3. Шаровая молния представляет собой слабо светящийся газовый шар, свободно плавающий в воздухе. Согласно модели Стаханова (одной из моделей, построенных для объяснения природы и поведения шаровой молнии), газ внутри шара представляет собой комплексное соединение, каждая частица которого состоит из иона азота, связанного с несколькими молекулами воды. Потерянные азотом электроны захватываются водой, так что каждая комплексная молекула в целом оказывается нейтральной. Определите, сколько молекул воды связывает каждый ион азота, если температура внутри шара $t = 600^\circ\text{C}$, а температура окружающего воздуха $t_0 = 20^\circ\text{C}$.

Так как шаровая молния плавает в воздухе, плотность составляющего ее газа равна плотности окружающего воздуха. Давление в молнии, по-видимому, также равно атмосферному. Эти два условия в совокупности дают

$$\frac{p}{p_0} = \frac{\rho}{\rho_0}, \text{ или } \frac{pV}{m} = \frac{p_0 V_0}{m_0}$$

(здесь все величины без индекса относятся к комплексу, а с индексом — к воздуху).

Используя уравнение газового состояния, получаем

$$\frac{T}{\mu} = \frac{T_0}{\mu_0},$$

откуда, зная молярную массу воздуха ($\mu_0 = 29 \cdot 10^{-3}$ кг/моль), найдем молярную массу комплексного соединения:

$$\mu = \mu_0 \frac{T}{T_0} \approx 86 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль.}$$

Молярная масса атомарного азота равна $14 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, а воды — $18 \cdot 10^{-3}$ кг/моль; следовательно, каждый ион азота связывает четыре молекулы воды.

Внешние условия, в которых находится газ, могут быть изменены различными способами, но всякий раз состояние газа можно описать уравнением газового состояния.

Задача 4. Цилиндрический сосуд сечения $S = 10 \text{ см}^2$ закрыт массивным поршнем. Внутри сосуда находится газ. Сосуд начинают поднимать с ускорением $2g$. Когда температура газа сравнялась с первоначальной, объем газа под поршнем уменьшился в 1,5 раза. Найдите массу поршня. Внешнее давление $p_0 = 10^5 \text{ Па}$.

В неподвижном состоянии сила тяжести поршня уравновешивалась разностью сил давления газа внутри сосуда и снаружи:

$$mg = (p - p_0)S.$$

При движении сосуда суммарная сила, действующая на поршень, сообщает ему ускорение $2g$, направленное вверх:

$$2mg = (1,5p - p_0)S - mg, \text{ или}$$

$$3mg = (1,5p - p_0)S$$

(при неизменной температуре объем уменьшится в 1,5 раза; значит, давление возросло тоже в 1,5 раза). Решая совместно полученные два уравнения, получаем

$$m = \frac{p_0 S}{3g} \approx 3,4 \text{ кг.}$$

Мы рассмотрели несколько примеров использования уравнения газового состояния (конечно, ими не исчерпывается диапазон задач, в которых находит применение уравнение Менделеева — Клапейрона). Однако не менее важным является вопрос, когда нельзя пользоваться этим уравнением, или, другими словами — какова область его применения.

Модель идеального газа основывается на предположении малости энергии взаимодействия молекул по сравнению с их кинетической энергией. Молекулы рассматриваются как упругие шарики, взаимодействующие лишь при непосредственном контакте. Размеры этих шариков ничтожно малы по сравнению с длиной их свободного пробега.

Конечно, такая модель весьма условна. Действительно, как, например, определить размеры молекул? Безусловно, разумно под так называемым эффективным диаметром молекул понимать то расстояние, при сближении на которое движение молекул заметно изменяется. Ясно, что при таком определении размер молекул должен зависеть от многих условий, в частности — от температуры. Опыт это подтверждает — он показывает, что с ростом температуры эффективный диаметр молекул уменьшается. Это и понятно: при повышении температуры кинетическая энергия молекул возрастает, молекулы должны ближе подойти друг к другу, чтобы потенциальная энергия их взаимодействия оказалась одного порядка с кинетической (иначе движение заметно не изменится). Правда, оказывается, что зависимость эта очень слабая и не так уж бессмысленно говорить о конкретных постоянных значениях размеров молекул.

Значительные отклонения от поведения идеального газа у реальных газов начинаются тогда, когда нельзя считать, что молекулы большую часть времени не взаимодействуют, то есть когда длина свободного пробега молекул — от соударения до соударения — становится сравнимой с размером молекул. В этом случае молекулы находятся, в основном, недалеко друг от друга, и их

взаимодействием пренебрегать уже нельзя.

При каких же условиях это происходит? Прежде чем ответить на этот вопрос, рассмотрим следующую задачу.

Задача 5. *Оцените длину свободного пробега молекул воздуха при нормальных условиях. Диаметр молекул принять равным $d = 3,7 \cdot 10^{-10}$ м.*

Молекула столкнется с другой молекулой, если расстояние между их центрами окажется меньше диаметра молекул d . Пусть за какое-то время молекула прошла путь l . При этом она столкнулась с молекулами, центры которых находятся в ломаном цилиндре (изломы в точках столкновений) длины l и сечения πd^2 . Число молекул в этом объеме $n\pi d^2 l$ (n — число молекул в единице объема) и есть общее число столкновений. Подсчитаем путь от одного столкновения до другого, то есть длину свободного пробега молекулы:

$$\lambda = \frac{l}{n\pi d^2} = \frac{l}{n\pi d^2} = \frac{RT}{N_A n \pi d^2} \approx 8,75 \cdot 10^{-8} \text{ м}$$

(здесь давление $p = 10^5$ Па, температура $T = 273$ К, число Авогадро $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ моль $^{-1}$). Экспериментальное значение для таких условий — $6,20 \cdot 10^{-8}$ м. Расхождение связано, в основном, с тем, что мы считали все молекулы, кроме выбранной, неподвижными. Подробный анализ, выходящий за рамки школьного курса, показывает, что учет относительного движения молекул приводит к изменению длины свободного пробега в $1/\sqrt{2}$ раз. Помножив полученный нами результат на этот множитель, получим $6,19 \cdot 10^{-8}$ м.

Но сейчас нас больше интересует другая сторона дела. При нормальных условиях длина свободного пробега примерно в 200 раз больше диаметра молекул, и модель идеального газа работает довольно хорошо. Но если давление возрастет в 100—200 раз (а температура не изменится), длина свободного пробега станет сравнимой с размером молекул. Это значит, что при таких

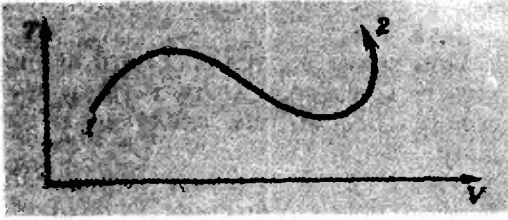


Рис. 2.

давлениях, или точнее — при таких плотностях, которые возникнут при нормальной температуре и высоких давлениях, молекулы практически никогда не будут находиться далеко друг от друга и их взаимодействием пренебрегать уже нельзя. В таком случае модель идеального газа оказывается непригодной. (Действительно, плотности конденсированных фаз — жидкостей и твердых тел — примерно в 1000 раз больше плотностей газов, а газ, в 5—10 раз менее плотный, чем жидкость, — это уже не идеальный газ.)

Однако если температура достаточно велика, то и при высоких давлениях газ зачастую можно считать идеальным, поскольку решающую роль (подчеркнем это еще раз) играет плотность газа.

Упражнения

1. На рисунке 3 изображен график изменения состояния некоторой массы идеального газа. Укажите, на каких участках графика давление растет, на каких падает.

2. В сосуде, где находился кислород, произведен электрический разряд. В результате весь кислород превратился в озон, а температура возросла в 2 раза. Как изменилось давление? Объем сосуда считать неизменным.

3. Сосуд сечения $S = 10 \text{ см}^2$ закрыт поршнем массы $m = 5 \text{ кг}$. В сосуде находится газ. При движении сосуда вниз с ускорением $4g$ объем газа под поршнем увеличился в 2 раза. Температура газа не изменилась. Найдите внешнее давление.

4. Спутник сечения $S = 1 \text{ м}^2$ движется с первой космической скоростью $v = 7,8 \text{ км/с}$ по околоземной орбите. Атмосферное давление на высоте орбиты (200 км) равно $p = 1,37 \cdot 10^{-4} \text{ Па}$, температура $T = 1226 \text{ К}$. Определите число соударений спутника с молекулами воздуха за 1 секунду.

Задачи с устного экзамена в МФТИ

Ниже приводятся задачи, предлагавшиеся в разные годы на вступительных экзаменах в Московский физико-технический институт. Здесь собраны задачи относящиеся лишь к одной теме — простейшим свойствам целых чисел.

1. Является ли число 123456789 простым?

2. Докажите, что уравнение

$$x^2 - y^2 = 1982$$

не имеет решений в целых числах.

3. Пусть p_1 и p_2 — два последовательных нечетных простых числа и $p_1 + p_2 = 2p$,

$p \in \mathbb{N}$. Докажите, что число p — составное.

4. Докажите, что если число $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n + 1$, $n \in \mathbb{N}$, делится на $n+1$, то число $n+1$ — простое.

5. Докажите, что для всякого натурального числа n , большего двух, одно из чисел $2^n - 1$ и $2^n + 1$ является составным.

6. Может ли число $3n + 2$, где n — натуральное, быть квадратом некоторого целого числа?

7. Докажите, что сумма $n^3 + 6n^2 - 4n + 3$ делится на 3 при любом натуральном n .

8. Докажите, что среди любых трех простых чисел, больших 3, всегда по крайней мере два обладают тем свойством, что либо их сумма, либо их разность делится на 12.

9. Докажите, что число $333^{777} + 777^{333}$ делится на 37.

10. Сколько существует натуральных чисел n таких, что

$$1982 < \sqrt{n} < 1983?$$

11. Докажите, что если m — целое число, то число $\frac{m}{3} + \frac{m^2}{2} + \frac{m^3}{6}$ также является целым.

12. Найдите пятнадцатое число, которое при умножении на 9 дает число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке.

13. Докажите, что всякое натуральное число A есть либо степень числа 2, либо сумма различных степеней числа 2.

14. Может ли число a^b , где a и b — иррациональные числа, быть рациональным?

А. А. Бойлбрух, В. М. Уроев, М. И. Шабунин

Многофигурная стереометрическая задача

Л. Ф. ШТЕРНБЕРГ

Стереометрия — самое слабое место в подготовке абитуриентов. Многие из них даже не берутся за стереометрическую задачу. И это объяснимо: стереометрическая задача — царица школьного задачника. Если остальные задачи — это задачи «на что-то» («на квадратные уравнения», «на подобие»), то стереометрическая — на все вместе взятое: для ее решения надо применять как чисто стереометрические приемы, так и планиметрические, алгебраические и т. д. Очень важно научиться определять, что и в какой последовательности применять. Об этом и пойдет у нас речь.

Два ключевых момента предлагаемого здесь метода решения многофигурных стереометрических задач — это

а) разбиение задачи на ряд более простых задач;

б) последовательное применение алгебры.

Рассмотрим пример.

Задача 1. В правильную четырехугольную пирамиду $SABCD$ с вершиной S вписан шар. Вторым шаром касается первого шара, а также плоскости основания пирамиды в точке A . Через центр второго шара и сторону BC основания пирамиды проведена плоскость, пересекающая ребро SA в точке K . Найти угол наклона этой плоскости к плоскости основания пирамиды, если известно, что ребро SA и диагональ сечения CK перпендикулярны.

Приступая к решению этой задачи, неискушенный школьник обычно пы-

тается нарисовать чертеж, на котором все условия задачи были бы «хорошо видны», и последовательно выразить одни элементы конфигурации через другие. И то, и другое сделать очень трудно, если не невозможно.

Поступим иначе. Нарисуем примерный общий чертеж (рис. 1) и попробуем ответить на вопрос: «Какие размеры надо знать, чтобы точно описать эту конструкцию?» Чтобы полностью определить пирамиду, надо знать, например, длину стороны основания и угол наклона боковой грани, для шаров нужны радиусы, для секущей плоскости — угол ее наклона. Конечно, можно выбрать и другие параметры, скажем высоту пирамиды вместо стороны основания и т. п. Надо лишь, чтобы они позволяли достаточно просто записать условия задачи и выразить искомые величины. Бывает, что первый выбор не совсем удачен и по ходу решения приходится менять переменные или вводить новые. Итак, пусть a — длина стороны основания пирамиды, α — угол наклона грани пирамиды к основанию, r и R — радиусы первого и второго шаров, φ — угол наклона секущей плоскости.

Ясно, что между этими величинами имеются определенные соотношения, их мы и попытаемся найти. Обратите внимание: не выразить одно через другое, а найти соотношения. Вычислить в итоге нам надо будет только φ .

Выделим теперь связки фигур, то есть группы фигур данной конструкции, связанных друг с другом условиями задачи:

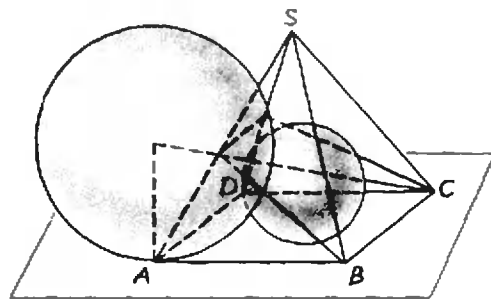


Рис. 1. Общий вид.

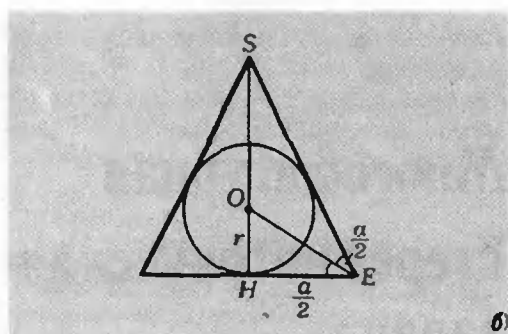
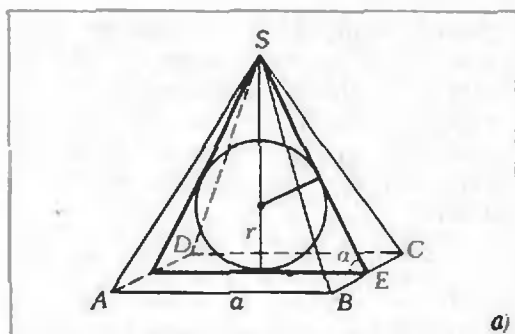


Рис. 2. Первая связка фигур.

- 1) пирамида и вписанный шар;
- 2) основание пирамиды и два шара (подчеркнем: только основание, а не вся пирамида);
- 3) основание пирамиды, второй шар и секущая плоскость;
- 4) секущая плоскость и пирамида (а здесь нельзя обойтись одной прямой SA, так как существенно, что это — ребро пирамиды).

Сделаем для каждой связки отдельный чертеж, развернув её так, чтобы было удобно видеть составляющие её фигуры. Рядом с отрезками, длины которых нам известны, напишем эти длины (в виде формул). Это очень важный момент: длины на чертеже помогут увидеть уравнения. Процесс расстановки длин на чертеже мы назовем *разметкой чертежа*. Теперь для каждой связки выпишем получающиеся соотношения.

1-ая связка фигур. Плоскость, проходящая через высоту пирамиды и апофему SE грани SBC, пересекает пирамиду по равнобедренному треугольнику, а шар — по вписанному в него кругу радиуса r (рис. 2, а). (Это и подобные ему утверждения в записи решения должны быть доказаны, сколь бы очевидными они ни казались. Но для нас сейчас важнее сам поиск решения и получение ответа, поэтому такого рода пояснения мы опускаем. А тому, что и как доказывать, как «навести строгость», уделяется достаточно много внимания в школе и в различных пособиях для поступающих*.)

*См., например, Г. В. Дорофеев, М. К. Потапов, Н. Х. Розов «Пособие по математике для поступающих в вузы» (М.: «Наука», 1976), раздел III, § 1.

Начертим сечение отдельно (рис. 2, б). Центр O вписанного шара лежит на биссектрисе угла SEH , который по величине равен углу между боковой гранью и основанием пирамиды. Отсюда вытекает первое соотношение:

$$r = \frac{a}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

Заметим, что тот же рисунок 2, б можно было бы получить, пользуясь не сечением, а проекцией пирамиды на плоскость, перпендикулярную ребру BC .

2-я связка фигур. Вынесем на отдельный чертеж оба шара и основание пирамиды (рис. 3, а). Выберем такой ракурс, чтобы нужные нам отрезки и углы были видны в натуральную величину (рис. 3, б). Проведя очевидные вспомогательные построения (не забудьте проделать нужные доказательства) и разметив чертеж, получим уравнение

$$(R+r)^2 - (R-r)^2 = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2.$$

(Тот же чертеж получается в сечении, проходящем через центры шаров и точки их касания с основанием.)

3-я связка фигур. Процедура аналогична: вынося связку на отдельный чертеж (рис. 4, а), проводя вспомогательные построения и разметку (докажите, что $\widehat{PBA} = \varphi$!) и рисуя сечение (плоскостью PAB — рис. 4, б), из прямоугольного треугольника PAB получаем уравнение

$$R = a \operatorname{tg} \varphi.$$

4-я связка фигур. Еще раз

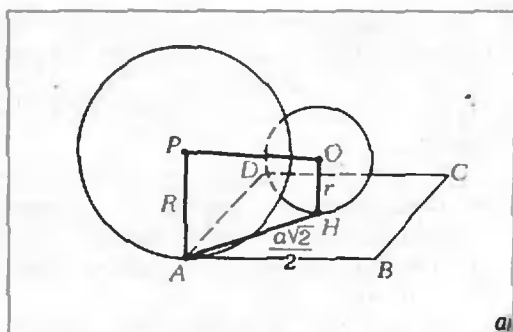


Рис. 3. Вторая связка фигур.

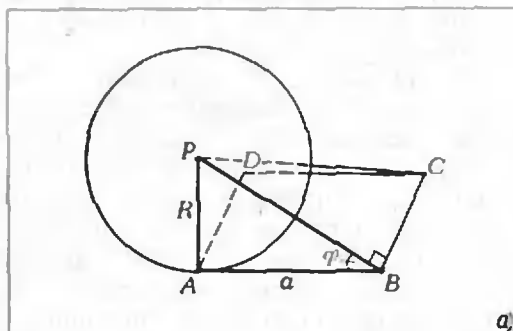
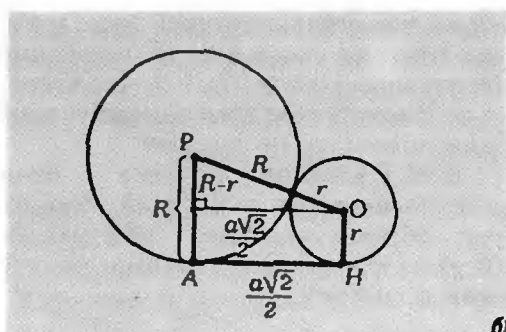


Рис. 4. Третья связка фигур.

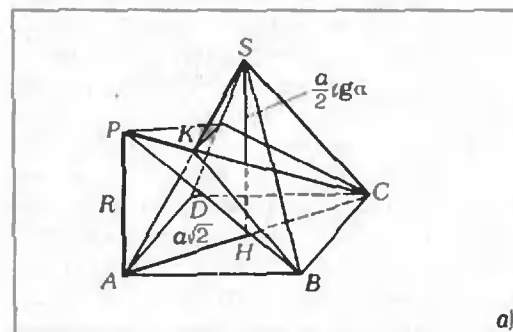
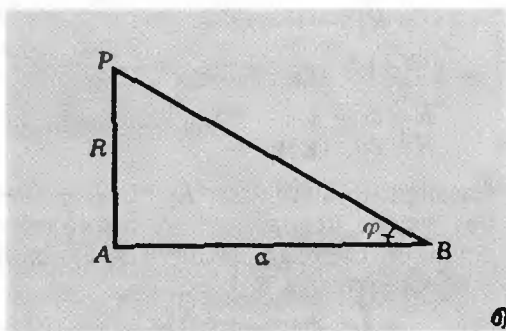
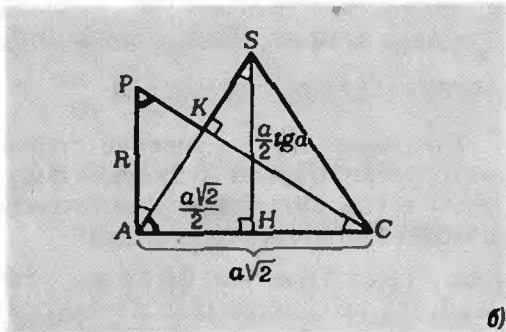


Рис. 5. Четвертая связки фигур.



та же процедура; на рисунке 5, а показан чертеж связки с разметкой, на рисунке 5, б — чертеж «удобного» сечения плоскостью ACS , на котором все нужные углы (они помечены дужками) видны в натуральную величину. Некоторые из этих углов, как легко заметить по рисунку, равны. Отсюда вытекает подобие треугольников PAC и AHS и уравнение

$$\frac{R}{a\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}/2}{(a \operatorname{tg} \alpha)/2} \quad \text{или} \quad R = 2a \operatorname{ctg} \alpha.$$

А теперь проверим условия — это очень полезный прием контроля.

1) *Пирамида правильная.* Условие использовано при определении длин отрезков в пирамиде.

2) *Первый шар вписан.* Использовано при составлении уравнения 1-й связки и на рисунке 3, б ($\widehat{AHO} = 90^\circ$).

3) *Второй шар касается первого.* Использовано при определении расстояния между центрами шаров (рис. 3, б).

4) *Второй шар касается плоскости основания.* Использовано на рисунке 3, б ($\widehat{HAP} = 90^\circ$) и при составлении уравнения 3-й связки ($\widehat{PAB} = \varphi$).

5) *Перпендикулярность ребра SA и диагонали сечения SK.* Использована при составлении уравнения 4-й связки.

Итак, все условия использованы. Получено 4 уравнения с 5-ю неизвестными. Так как надо найти только

одну величину, которая размерности не имеет, то размерные величины должны сократиться. Значит, нехватка одного уравнения помешать не должна.

Все! Геометрия окончена — начинается алгебра (в которой абитуриент обычно чувствует себя увереннее). Соберем полученные уравнения в систему:

$$\begin{aligned} r &= \frac{a}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \\ (r+R)^2 - (R-r)^2 &= \\ &= \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 \text{ или } 8Rr = a^2 \\ R &= a \operatorname{tg} \varphi \\ R &= 2a \operatorname{ctg} \alpha. \end{aligned}$$

Размерные величины R , r и a из нее без труда исключаются, после чего остается система из двух уравнений с неизвестными φ и α :

$$\begin{cases} 4 \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 1 \\ \operatorname{tg} \varphi = 2 \operatorname{ctg} \alpha. \end{cases}$$

Решение этой системы оставим читателям. (Ответ: $\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sqrt{3}}{6}$.)

Подведем итоги. Решение стереометрической задачи со многими фигурами и связями между ними можно разбить на следующие этапы:

1. Построить чертеж — общий вид конфигурации. На чертеже не должно быть вспомогательных линий: они лишь затемняют общую картину.

2. Ввести переменные, определяющие размеры элементов чертежа. Не бояться, если этих переменных окажется много: их должно быть достаточно, чтобы построить каждый элемент конфигурации в отдельности.

3. Выделить связки фигур, пользуясь общим чертежом и условиями задачи.

4. Вынести на отдельный чертеж каждую связку, разметить чертежи.

5. Выбрать такой ракурс (или такое сечение) для каждой связки, чтобы все отрезки и углы, которые предполагается связать уравнением, были видны в натуральную величину. Разметить полученный чертеж.

6. Выписать уравнения, получающиеся из каждой связки фигур. Не торопиться их разрешать относительно какой-либо величины.

7. Проверить использование всех условий, количество уравнений и неизвестных и возможность нахождения того значения, которое требуется по условию.

8. Свести уравнения в систему и решить ее, забыв про геометрию и пользуясь приемами алгебры и тригонометрии.

9. Проверить решение. Техника проверки геометрических решений заслуживает отдельного разговора*). Сейчас мы познакомимся с одним из ее приёмов — прикинем, насколько чертежи и ответ в нашей задаче согласуются друг с другом.

Простой подсчет показывает, что при найденном нами значении φ угол α близок к прямому ($\operatorname{ctg} \alpha = \sqrt{3}/12$), то есть пирамида довольно сильно вытянута, а радиус второго шара меньше (!) радиуса первого (вписанного): $R = 2r/3$. По сути дела, наше решение опиралось на неправильные, вернее — не совсем правильные, чертежи! Но недаром говорят, что «геометрия — это искусство делать правильные выводы из неправильных чертежей». Легко убедиться, что уравнения, которые мы вывели из 1-й, 3-й и 4-й связок, никак не зависят от степени «вытянутости» пирамиды. А вот в рассмотрение 2-й связки поправку внести надо. Исправленный вариант рисунка 3, б показан на рисунке 6. Впрочем, на окончательном виде уравнения эта поправка не сказывается. Подчеркнем, что в записи решения должны быть учтены все возможные варианты расположения фигур.

Роль общего чертежа в приведенной схеме решения сводится, в основном, к тому, чтобы помочь выделить связки. Порой, как в следующей задаче, это можно сделать непосредственно по условию, и тогда он вообще не нужен.

Задача 2. Точки $A_1, B_1, C_1, D_1, A_2, B_2, C_2, D_2$ лежат на сфере. Отрез-

*) См., например, В. Матизен «Найдем ошибку» («Квант», 1980, № 10).

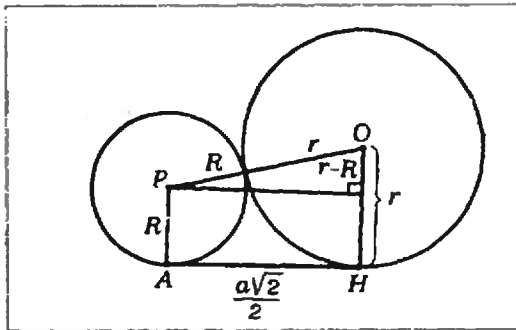


Рис. 6.

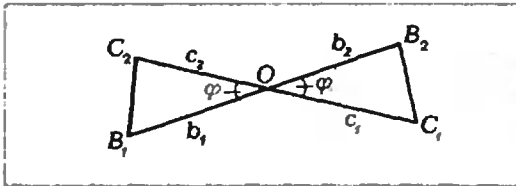


Рис. 7.

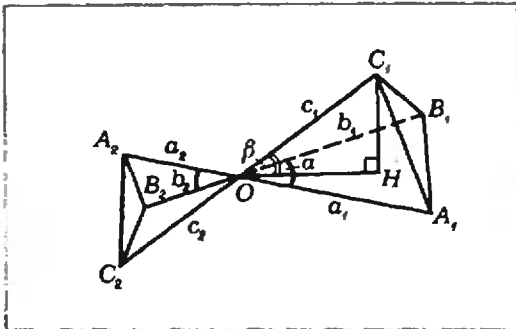


Рис. 8.

ки A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 и D_1D_2 пересекаются в точке O , которая делит отрезок $D_1D_2 = 2l$, отношение площадей треугольников OB_2C_1 и OB_1C_2 равно k , отношение объемов пирамид $OA_1B_1C_1$ и $OA_2B_2C_2$ равно t , а отношение объемов пирамид $OA_2B_1D_1$ и $OA_1B_2D_2$ равно n . Найдите длины отрезков OA_1, OB_1 и OC_1 .

Читатель может убедиться самостоятельно, что общий чертеж к этой задаче способен, пожалуй, только напугать, ибо по нему не видно ничего*). Поэтому, не обращая к нему, сразу приступим к выделению связок и составлению уравнений. Пусть $a_1 = |OA_1|, a_2 = |OA_2|, b_1 = |OB_1|$. Аналогично определим величины $b_2, c_1,$

c_2, d_1 и d_2 . (Надеемся, 8 неизвестных не смущают читателя и он готов ввести еще хоть сотню, если потребуются.) Два уравнения видны сразу:

$$d_1 = d_2 = l \quad (1)$$

(«связка» здесь — отрезок D_1D_2 и его середина O). Вторая связка — треугольники OB_2C_1 и OB_1C_2 (рис. 7). Выражая их площади через угол $\varphi = \widehat{B_2OC_1} = \widehat{B_1OC_2}$ и заключающие его стороны, получим

$$\frac{S_{OB_2C_1}}{S_{OB_1C_2}} = \frac{0.5 \cdot b_2 c_1 \sin \varphi}{0.5 \cdot b_1 c_2 \sin \varphi} = \frac{b_2 c_1}{b_1 c_2},$$

следовательно,

$$\frac{b_2 c_1}{b_1 c_2} = k. \quad (2)$$

Аналогично записывается и отношение объемов пирамид (связка состоит из тетраэдров $OA_1B_1C_1$ и $OA_2B_2C_2$). Найдём, например, объём пирамиды $OA_1B_1C_1$ (рис. 8). Пусть C_1H — её высота, опущенная на основание OA_1B_1 , тогда

$$\begin{aligned} V_{OA_1B_1C_1} &= \frac{1}{3} \cdot S_{OA_1B_1} \cdot |C_1H| = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} a_1 b_1 \sin \alpha \cdot c_1 \sin \beta = \\ &= \frac{1}{6} a_1 b_1 c_1 \sin \alpha \sin \beta, \end{aligned}$$

где $\alpha = \widehat{A_1OB_1}$, а β — угол между ребром OC_1 и основанием. Точно так же

$$V_{OA_2B_2C_2} = \frac{1}{6} a_2 b_2 c_2 \sin \alpha \sin \beta,$$

поэтому $V_{OA_1B_1C_1} : V_{OA_2B_2C_2} = a_1 b_1 c_1 : a_2 b_2 c_2$. Отсюда получаем следующее уравнение:

$$\frac{a_1 b_1 c_1}{a_2 b_2 c_2} = t \quad (3)$$

и, таким же образом,

$$\frac{a_2 b_1 d_1}{a_1 b_2 d_2} = n. \quad (4)$$

Остается неиспользованным лишь одно условие: все точки (кроме O) лежат на сфере. Его нужно записать в виде соотношения между длинами отрезков OA_1, OA_2, OB_1, \dots . Рассмотрим связку, состоящую из сферы и отрезков A_1A_2 и B_1B_2 . Пересекая её плоскостью, содержащей эти отрезки, получим рисунок 9. Треугольники

*) Еще «страшнее» в этом смысле последняя задача из приведенных в конце статьи. Но и ее можно решить, последовательно пользуясь принципом «разделяй и властвуй».

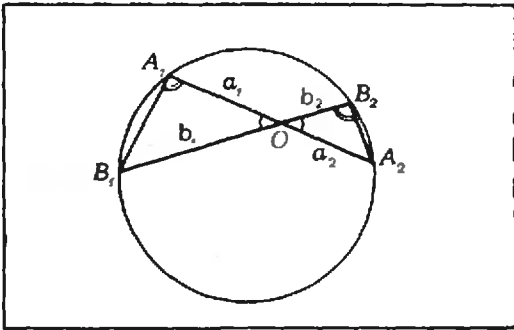


Рис. 9.

OA_1B_1 и OA_2B_2 подобны (так как $\widehat{A_1OB_1} = \widehat{A_2OB_2}$, $\widehat{B_1A_1O} = \widehat{OB_2A_2} = \frac{1}{2} \widehat{B_1A_2}$), поэтому $|OA_1| : |OB_1| = |OB_2| : |OA_2|$, то есть

$$a_1 a_2 = b_1 b_2. \quad (5)$$

Аналогично,

$$b_1 b_2 = c_1 c_2 = d_1 d_2. \quad (6)$$

Очевидно, равенства (1)–(6) содержат фактически 8 уравнений (столько же, сколько неизвестных), и все условия задачи использованы. Решаем систему из этих уравнений и получаем ответ: $a_1 = \left(\frac{m}{kn^2}\right)^{\frac{1}{6}} l$,

$$b_1 = \left(\frac{mn}{k}\right)^{\frac{1}{6}} l, \quad c_1 = (k^2 mn)^{\frac{1}{6}} l.$$

Приемы, с которыми мы познакомили читателей, с большим или меньшим успехом можно применять почти к любой стереометрической задаче. Поэтому овладеть ими необходимо:

это поможет преодолеть робость, которую испытывают многие абитуриенты, сталкиваясь со стереометрией на конкурсных экзаменах.

Упражнения

1 (МГУ, экономический ф-т, 1972). 3 треугольнике ABC $|AC| = 12$ см, $|AB| = |BC| = 3\sqrt{10}$ см. Два шара касаются плоскости треугольника ABC в точках A и C и расположены по разные стороны от этой плоскости. Расстояние между центрами этих шаров равно 15 см. Центр третьего шара находится в точке B , и этот шар касается двух данных шаров. Определить радиус третьего шара.

2 (МГУ, ф-т вычислительной математики и кибернетики, 1972). Боковые ребра правильной треугольной пирамиды $SABC$ наклонены к плоскости основания под углом 45° . Шар касается плоскости основания ABC в точке A и, кроме того, касается продолжения ребра BS за вершину S . Через центр шара и высоту BD основания проведена плоскость. Найти угол наклона этой плоскости к плоскости основания.

3 (МГУ, геологический ф-т, 1980). На сфере радиуса 11 см расположены точки A, A_1, B, B_1, C и C_1 . Прямые AA_1, BB_1 и CC_1 взаимно перпендикулярны и пересекаются в точке M , отстоящей от центра сферы на расстояние $\sqrt{59}$ см. Найти длину отрезка AA_1 , если известно, что $|BB_1| = 18$ см, а точка M делит отрезок CC_1 в отношении $(8 + \sqrt{2}) : (8 - \sqrt{2})$.

4 (МГУ, мехмат, 1981). Отрезок DE , лежащий в двугранном угле AD с точками B и C на его гранях, параллелен плоскости треугольника ABC , имеющего площадь S . В тетраэдр $BCDE$ вписан шар, k — отношение расстояния от центра шара до прямой DE к расстоянию от (DE) до плоскости ABC . Пусть B' — проекция точки B на плоскость CDE ; известно, что $\text{tg } \widehat{B'DE} : \text{tg } \widehat{BDE} = 1$. Через середину $[AD]$ проводится плоскость P , параллельная плоскости ABC . Найти площадь сечения многогранника $ABCDE$, составленного из тетраэдров $ABCD$ и $BCDE$, плоскостью P , если известно, что сумма площадей всех граней тетраэдра $BCDE$ равна σ .

Наша обложка

На первой странице обложки мы публикуем фотографию «большой интегральной схемы» микропроцессора (увеличено в 50 раз).

Появление микропроцессоров связано с огромным прогрессом микроэлектроники, впитавшей в себя успехи многих областей науки и техники, — физики, химии, вычислительной техники, точной металлургии, приборостроения и машиностроения. Сейчас в «большой интегральной схеме» — такой, как на обложке (ее размеры — до

50 квадратных миллиметров, толщина — менее миллиметра), — помещаются десятки тысяч элементов размером 2–3 микрона и потребляет она энергию всего в несколько ватт.

Одна из первых отечественных ЭВМ БЭСМ-1 занимала площадь в десятки квадратных метров и потребляла десятки киловатт энергии. Современные микро-ЭВМ размером с небольшую книгу, работающие на больших интегральных схемах, имеют значительно большую произ-

водительность, чем ЭВМ БЭСМ-1, и потребляют энергию в тысячу раз меньше.

Микро-ЭВМ стали мозгом огромного числа приборов и машин, от бытовых (стиральные машины, печи для приготовления пищи и т. д.) до сложных роботизированных промышленных установок, составляющих основу высокоэффективного автоматизированного производства во всех областях народного хозяйства.

А. И. Березенко, В. И. Юшков



Задачи

1. Угадайте закономерность форм фигурок. Какую фигуру следует поставить следующей?



2. Отношение двух чисел равно десятичной дроби, целая часть которой равна делителю, а после запятой записан делитель. Какие это числа?



3. Вертушку погрузили целиком в ручей так, что ее ось расположилась горизонтально и перпендикулярно направлению течения: Будет ли она крутиться?



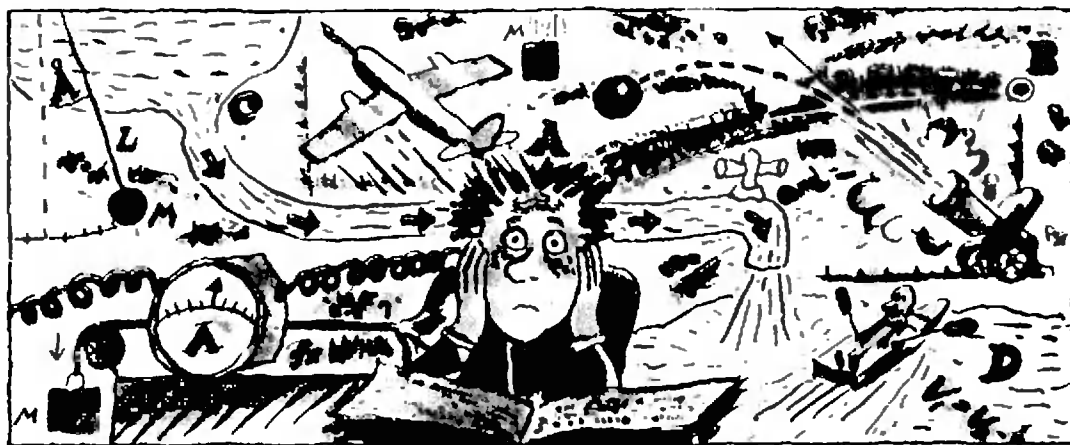
4. Текст шифруется с помощью таблицы: каждой цифре сопоставляется одна из трех букв, расположенных под ней в таблице, а знаку «*» — пробел или одна из букв «ю», «я». Расшифруйте следующий вопрос и ответьте на него:

5343934*150413*6*8156215044414*
*305041080?



Эти задачи нам предложили
Н. И. Бовсуновский, А. К. Звонкин,
Б. А. Мукушев, А. П. Савин,
А. В. Бугасевич





Дано... Требуется определить...

Л. А. ЛЕЩИНСКИЙ,
Т. С. ПЕТРОВА

Как вы решаете задачи по физике? Возможно, многим из вас этот вопрос покажется странным — уж очень очевиден ответ: сначала читаю условие, потом думаю над решением, потом его записываю, получаю ответ, если в задачнике приведены ответы, то проверяю свой ответ по задачнику.

Ну, а если решенные сразу не «вырисовываются»? Вы смотрите в ответы? Думаем, что многие из вас делают именно так. А жаль. Поломайте голову над задачей, подойдите к ней и так, и эдак, сами доберитесь до ответа — и мы уверены, что, получив правильный результат, вы испытаете чувство большого удовлетворения. Польза же, которую приносит такая работа над задачей, несомненна.

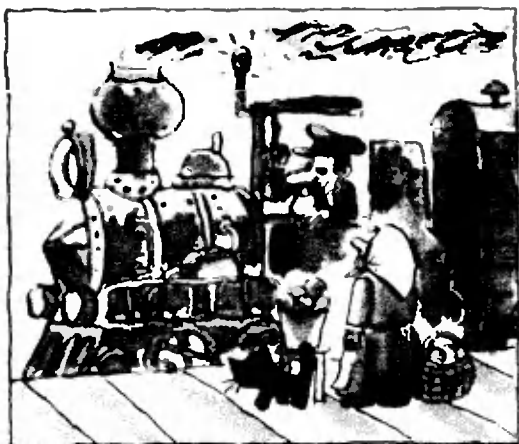
Конечно, бывают очень трудные задачи, и дать какой-либо универсальный рецепт решения невозможно. Однако есть условия, выполнять которые совершенно необходимо, если вы хотите научиться решать за-

дачи. Каждому ясно, что перед тем, как приступить к задачам, надо разобраться в теории. Но вот вы выучили теоретический материал, поняли его и беретесь за задачу. Прочитали, что «дано», что «требуется определить». Приступаете к решению? Подождите! Прежде чем думать над решением, подумайте над условием. Представьте себе то физическое явление, тот процесс, о котором идет речь в задаче. Проанализируйте все данные, приведенные в условии, — ведь, как правило, ничто из того, что в условии «дано», не бывает дано напрасно. И очень часто, осмыслив до конца это «дано», вы сможете догадаться (не угадать, а именно догадаться), что «требуется определить». Если эта связь вами установлена, можете считать, что полдела сделано.

Чтобы вы лучше поняли, о чем мы говорим, предлагаем вам сделать несколько задач. В условиях этих задач приведено только то, что «дано». Вы сами придумайте, что «требуется определить», и определите^{*}.

Задача 1. Две дороги пересекаются под прямым углом. Участки дорог, образующие перекресток, покрыли асфальтом. Длина каждого участка 25 м, ширина 4 м. На покрытие израсходовали 5520 кг асфальта.
Задача 2. Стальной шар, масса кото-

^{*} При решении вам придется иногда пользоваться разными табличными данными.



рого равна $1,2 \text{ кг}$, имеет объем 200 см^3 .

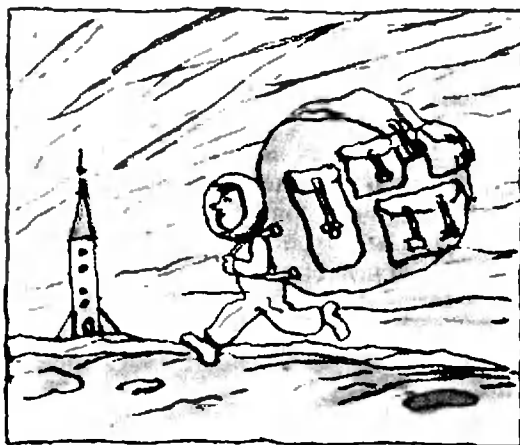
Задача 3. Длина платформы железнодорожной станции равна 60 м . Товарный состав, движущийся со скоростью 45 км/ч , идет мимо платформы 16 с .

Задача 4. Атмосферное давление у поверхности Венеры — $10,3 \text{ мПа}$, сила тяжести — в $1,2$ раза меньше, чем на Земле.

льда, уровень воды повысился на 9 мм .

Задача 7. Сопротивление железной проволоки, масса которой 390 г , равно 5 Ом .

Задача 8. Два ползунковых реостата, рассчитанных на сопротивление 20 Ом каждый, намотаны один из никелиновой проволоки, а другой — из нихромовой. Длины проволок, использованных для обмоток, одинаковы.



Задача 5. Металлический шар массы 900 г , нагретый до 155°C , опустили в калориметр, в котором было 3 л воды при температуре 10°C . В результате в калориметре установилась температура 15°C . Теплоемкость калориметра пренебрежимо мала по сравнению с теплоемкостью шара и воды.

Задача 6. В цилиндрическом сосуде с площадью дна 125 см^2 находится вода. Когда в сосуд положили кубик

Нам хотелось бы, чтобы придуманные вами вопросы к этим задачам и их решения вы прислали в редакцию. Наиболее удачные из них будут опубликованы в журнале. Желаем вам успехов!



Задачник «Кванта»

Задачи

М786—М790; Ф798—Ф802

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 30 апреля 1983 года по адресу: 103006, Москва, К-6, ул. Горького, 32А, «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 2—83» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М786, М787» или «Ф798». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

М786. Докажите, что для любых натуральных n и k (больших 1) число n^k можно представить в виде суммы n последовательных нечетных чисел. (Например, $4^3 = 13 + 15 + 17 + 19$; $7^2 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13$; $3^4 = 25 + 27 + 29$.)

А. Н. Козаченко

М787. Найдите отношение сторон прямоугольного треугольника, если известно, что одна половина гипотенузы (от вершины до середины гипотенузы) видна из центра вписанной окружности под прямым углом.

Б. С. Пицкель

М788. а) На графике $y = x^2$ отмечены точки $A(a; a^2)$ и $B(b; b^2)$. Найдите между ними точку $M(m; m^2)$, для которой сумма площадей двух сегментов, ограниченных графиком и отрезками AM и BM , наименьшая.

б) На графике дифференцируемой функции $y = f(x)$ отмечены точки A и B . Известно, что график и отрезок AB ограничивают выпуклую фигуру. Пусть M — точка графика, расположенная между A и B , для которой сумма площадей двух сегментов, ограниченных графиком и отрезками AM и BM , наименьшая. Докажите, что касательная к графику в точке M параллельна хорде AB .

Е. Д. Москаленский, Ю. В. Чиняев

М789. а) 10 точек, делящие окружность на 10 равных дуг, попарно соединены 5 хордами. Обязательно ли среди них найдутся две хорды одинаковой длины?

б) 100 точек, делящие окружность на 100 равных дуг, попарно соединены 50 хордами. Докажите, что среди них обязательно найдутся две хорды одинаковой длины.

В. В. Произволов

М790. а) Про числовую функцию f известно, что если $|x - y| = 1$, то $|f(x) - f(y)| = 1$. Верно ли, что при любых x и y будет выполнено равенство

$$|f(x) - f(y)| = |x - y|?$$

Пусть про отображение F плоскости в себя известно, что любые две точки X, Y , находящиеся на расстоянии 1, оно переводит в две точки $F(X), F(Y)$, также находящиеся на расстоянии 1:

$$\varrho(X, Y) = 1 \Rightarrow \varrho(F(X), F(Y)) = 1;$$

Тогда для любых двух точек X, Y плоскости

$$\varrho(X, Y) = \varrho(F(X), F(Y)),$$

то есть отображение F сохраняет расстояние. Докажите следующие утверждения, из которых вытекает эта теорема: для любых X, Y

$$б) \varrho(F(X), F(Y)) \leq \varrho(X, Y) + 1;$$

$$в) * \varrho(X, Y) = \sqrt{3} \Rightarrow \varrho(F(X), F(Y)) = \sqrt{3};$$

$$г) * \varrho(F(X), F(Y)) \leq \varrho(X, Y);$$

$$д) * \varrho(F(X), F(Y)) \geq \varrho(X, Y).$$

(Вы можете, конечно, предложить и другой план доказательства теоремы.)

А. Тошки

Ф798. В реку, скорость течения которой везде равна u , из точки O на берегу бросают камень перпендикулярно берегу. Скорость поверхностных волн в воде равна v . Через какое время после падения камня волна придет в точку O , если камень упал на расстоянии L от берега?

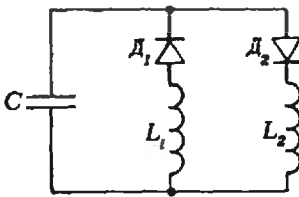
П. И. Зубков

Ф799. Высота вертикального водяного фонтана от уровня выходной трубы насоса равна H . Во сколько раз следует изменить мощность насоса, чтобы полная высота фонтана осталась прежней после подсоединения к выходной трубе насоса вертикальной трубы такого же диаметра с высотой $h < H$?

П. И. Зубков

Ф800. Схема состоит из конденсатора емкости C , диодов D_1 и D_2 , и катушек с индуктивностями L_1 и L_2 , собранных, как показано на рисунке. Найти период колебаний напряжения на конденсаторе в этой схеме.

Г. Л. Коткин, Г. В. Меледин



Ф801. В исходном состоянии центры двух шаров с массами m и радиусами R разнесены на расстояние $10R$. На одном из них равномерно распределен заряд $+Q$, на втором $-Q$. Первый шар привязан к удаленной стенке ниткой, которая выдерживает на разрыв натяжение T . Второй шар в некоторый момент отпускают. Найти скорость шаров после соударения, если удар абсолютно неупругий. Заряды не перераспределяются.

Г. В. Федотович

Ф802. Закрытый с торцов теплоизолированный цилиндр массы m перегороден неподвижным поршнем массы M . С обеих сторон от поршня находится по одному молю идеального газа, внутренняя энергия которого равна $U = cT$. Коротким ударом цилиндру сообщают скорость \vec{v} , направленную вдоль его оси. На сколько изменится температура газа после затухания колебаний поршня? Трения между поршнем и цилиндром нет.

В. Г. Дудников

Problems

M786 — M790; P788 — P802

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandard ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than April 30th, 1983 to the following address: USSR, Moscow, 103006, Москва, К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Please send us the solutions of physics and mathematics problems, as well as solutions from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: "KVANT'S PROBLEMS" and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped self-addressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. If you have an original problem to propose for publication, please send it to us under separate cover, in two copies (in Russian or in English), including the solution. On the envelope write **NEW PROBLEM IN PHYSICS (or MATHEMATICS)**.

M786. Prove that for any two integers n and k greater than 1, the number n^k can be represented as the sum of successive odd numbers, e. g.

$$4^3 = 13 + 15 + 17 + 19; \quad 7^2 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13; \quad 3^4 = 25 + 27 + 29.$$

A. N. Kozachenko

M787. Half the hypotenuse (from its midpoint to a vertex) is seen from the centre of the incircle of a right triangle under a right angle. Find the quotient of lengths of the two other sides of the triangle.

B. S. Pitskel

M788. a) Two points $A(a; a^2)$ and $B(b; b^2)$ are picked on the graph of $y = x^2$. Find a point $M(m; m^2)$ between them such that the sum of areas of the two figures bounded by the graph and the line segments AM and BM is minimal.

b) Two points A and B are picked on the graph of a differentiable function $y = f(x)$. It is known that the graph and the line segment AB bound a convex figure. Suppose that M is the point of the graph for which the sum of areas of the two figures bounded by the graph and the segments AM and BM is minimal. Prove that the tangent to the graph at the point M is parallel to AB .

E. D. Moskalenski, Yu. B. Chinyayev

M789. a) 10 points, which divide the circle into 10 congruent arcs, are joined pairwise by 5 line segments. Will two segments necessarily be of the same length?

b)* 100 points, which divide the circle into 100 congruent arcs, are joined pairwise by 50 line segments. Prove that at least two of them will be of the same length.

V. V. Proizvolov

M790. a) For the numerical function f it is known that $|x - y| = 1$ implies $|f(x) - f(y)| = 1$. Will the inequality

$$|f(x) - f(y)| = |x - y|$$

necessarily hold for all x, y ?

For the map F of the plane into itself it is known that it sends any two points X, Y whose distance is 1 into points $F(X), F(Y)$ at the same distance:

$$q(X, Y) = 1 \Rightarrow q(F(X), F(Y)) = 1$$

Then for any two points X, Y of plane

$$q(X, Y) = q(F(X), F(Y)),$$

- i. e. the map F is distance-preserving. Prove the following statements, which imply this theorem: for all X, Y
- b) $q(F(X), F(Y)) \leq q(X, Y) + 1$;
- c)* $q(X, Y) = \sqrt{3} \Rightarrow q(F(X), F(Y)) = \sqrt{3}$;
- d)* $q(F(X), F(Y)) < q(X, Y)$;
- e)* $q(F(X), F(Y)) > q(X, Y)$
- (Of course, you can propose a different plan for proving the theorem.)

A. Tyszka

P798. A stone is thrown perpendicularly to the shore from the point O on it into a river which flows with the same velocity u everywhere. The velocity of surface waves in water is v . How long will the waves from the stone's splash take to reach O if the stone fell at the distance L from the shore?

P. I. Zubkov

P799. The height of a fountain of water, measured from the open end of the output pipe of a pump, is H . How should the power of the pump be altered in order to leave the total height of the fountain unchanged when a vertical pipe of the same diameter and of height $h < H$ is attached to the output pipe?

P. I. Zubkov

P800. A circuit consists of a condenser of capacity C , of the diodes D_1, D_2 and the coils of inductivity L_1, L_2 assembled as shown on the figure on p. 39. Find the period of voltage oscillations on the capacitor in this circuit.

G. L. Kotkin, G. V. Meledin

P801. At the initial moment the distance between the centres of two solid balls of mass m and radius R is $10R$. The charge $+Q$ is uniformly distributed on one of them, the charge $-Q$ — on the other. The first is tied to a far-away wall by a string which will withstand the tension T before ripping. Find the velocity of the balls after their collision, which is assumed absolutely inelastic. No redistribution of charges is assumed to occur.

G. V. Fedotovich

P802. A thermoisolated cylinder of mass m , sealed at both ends, is divided by a motionless piston of mass M and contains one mole of ideal gas with internal energy, $U = cT$ on each side of the piston. The velocity \vec{v} along the cylinder's axis is communicated to the cylinder by a short push. How will the temperature of the gas have changed when the oscillations about the piston of the cylinder cease? There is no friction between piston and cylinder.

V. G. Dudnikov

Решения задач

M765—M769, M771—M774; Ф783—Ф787

M765. Пусть B — конечное множество точек на плоскости, не принадлежащих одной прямой.

а) Докажите, что найдутся три точки множества B такие, что проходящая через них окружность не содержит внутри себя других точек множества B .

б) * Назовем триангуляцией множества точек B се-

а) Пусть P и Q две ближайшие точки из данного множества B . Третью точку R выберем так, чтобы величина $\angle PRQ$ была наибольшей. Так как $|PR| > |PQ|, |RQ| > |PQ|$, величина угла $\angle PRQ$ не больше 60° . Легко видеть, что (рис. 1) $\angle PMQ > \angle PRQ$ для всех точек M внутри окружности, описанной около $\triangle PQR$ (независимо от того, по какую сторону от PQ лежит M), поэтому ни одна из точек M не принадлежит B .

б) Решение этой задачи тесно связано с замечательным разбиением плоскости на многоугольные «страны» со «столицами» в точках B по следующему принципу: каждая точка плоскости относится к той стране, столица которой

действие треугольников с множеством вершин V , не налегающих друг на друга и в объединении дающих выпуклый многоугольник (триангуляцию множества V можно получить, соединяя его точки непересекающимися отрезками, пока это возможно). Докажите, что для любого V существует такая триангуляция, что окружность, описанная около любого треугольника этой триангуляции, не содержит внутри себя точек множества V . Укажите способ построения такой триангуляции.

в)* Докажите, что если никакие четыре точки множества V не лежат на одной окружности, то описанная в пункте б) триангуляция единственна.

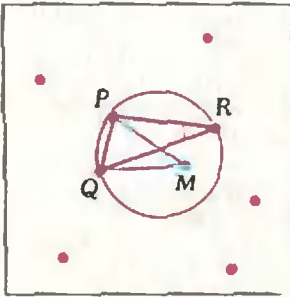


Рис. 1.

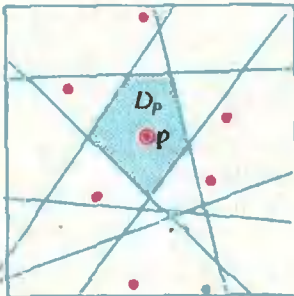


Рис. 2.

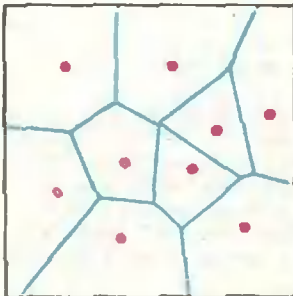


Рис. 3.

расположена ближе к ней, чем все остальные столицы. Покажем, как построить это разбиение и получить из него некую триангуляцию.

Обозначим через $C = C(V)$ выпуклую оболочку V , то есть наименьший выпуклый многоугольник, покрывающий V (его вершинами служат некоторые точки из V , которые мы будем называть *крайними*).

Для любых двух точек P, Q из V назовем *осью* пары (P, Q) прямую $l(P, Q)$, проведенную через середину отрезка PQ перпендикулярно этому отрезку. Заметим, что ось $l(P, Q)$ служит множеством центров всех окружностей, проходящих через точки P и Q . Нам понадобится также следующее очевидное утверждение, на которое мы будем ссылаться как на «о с н о в и у о л е м м у»: ось $l(P, Q)$ разбивает плоскость на две части, в одной из которых находятся точки, которые ближе к P , чем к Q , а в другой — ближе к Q , чем к P .

Для данной точки P из V назовем *страной со столицей P* область D_P , полученную следующим образом: проведем прямые $l(P, Q)$, где Q — все точки V , отличные от P , и среди тех областей, на которые эти прямые делят плоскость, выберем область D_P , содержащую точку P (рис. 2). Это будет либо выпуклый многоугольник, либо (если P — крайняя точка V) — неограниченная, «уходящая в бесконечность» выпуклая область, граница которой состоит из двух лучей и, возможно, еще одного или нескольких отрезков.

Пользуясь основной леммой, мы видим, что каждая страна D_P состоит из всех точек плоскости, которые расположены к точке P ближе, чем к другим точкам из V (на границе двух стран D_P и D_Q лежат точки, однако удаленные от столиц P и Q). Отсюда следует, что страны D_P , где P пробегает все множество V , покрывают плоскость и пересекаются лишь по границам (рис. 3)*.

Назовем точки P, Q из V *близкими*, если их страны D_P и D_Q имеют общий участок границы, лежащий на прямой $l(P, Q)$, и *далекими*, если их страны не имеют ни одной общей граничной точки. (В исключительном случае, когда в одной точке O сходятся границы более чем трех стран, возникают пары точек P, R , для которых пересечение границ $D_P \cap D_R$ состоит из одной точки — при этом точки P, Q не близкие и не далекие.)

Теперь построим триангуляцию многоугольника $C(V)$ с вершинами во всех точках V , обладающую требуемым в условии свойством. Для этого соединим отрезками все пары близких точек (красные отрезки на наших рисунках); эти отрезки разобьют многоугольник $C(V)$ на треугольники (и многоугольники). Заметим, что если PQ и PR — соседние отрезки, ведущие из некоторой столицы P в близкие к ней столицы Q и R , то есть в угле QPR нет точек, близких к P , то страны D_Q, D_R и D_P имеют общую точку границы O (рис. 4). Рассмотрим один из треугольников (или многоугольников), на которые разделен $C(V)$ проведенными отрезками. Страны со столицами в его вершинах имеют общую точку O границы; точка O удалена от этих столиц на одинаковое расстояние, а от всех остальных точек V — на большее расстояние, то есть внутри описанной окружности нашего треугольника (многоугольника) с центром O нет точек V . Многоугольники с числом вершин более трех (они возникают лишь в исключительных случаях, когда более трех стран имеют общую точку границы) мы можем произвольным образом разбить диагоналями на треугольники (рис. 5). Полученная триангуляция удовлетворяет условию задачи.

Очень советуем вам, разбирая решение, взять любые 5—10 точек плоскости и практически построить для

* Об этом разбиении плоскости, называемом *разбиением Дирихле*, см., например, в книге П. Б. Васильева и В. Л. Гутенмахера «Прямые и кривые» [М., «Наука», 1978, § 3, с. 59, решение «Задачи про сыр»].

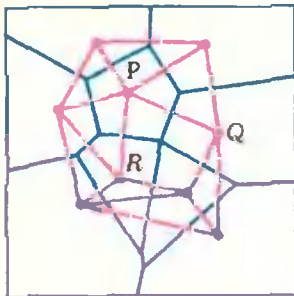


Рис. 4.

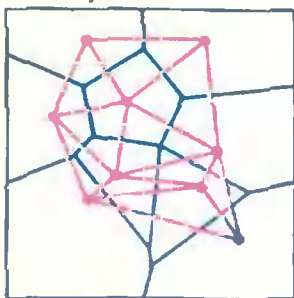


Рис. 5.

М766. Докажите, что сумма квадратов трех последовательных целых чисел не может быть кубом натурального числа.

М767. а) Прямая l делит площадь выпуклого многоугольника пополам. Докажите, что отношение, в котором эта прямая делит проекцию многоугольника на перпендикулярную к ней прямую, не превосходит $1 + \sqrt{2}$.

б) Каждая из трех прямых делит площадь данной фигуры пополам. Докажите, что площадь части фигуры, заключенная в треугольнике между тремя прямыми, не превосходит $1/4$ всей площади фигуры.

них разбиение на «стороны» и описанную триангуляцию (см. рисунок на 4-й странице обложки).

в) Пусть никакие четыре точки не лежат на одной окружности (тогда каждая пара этих точек — близкая или далекая). Докажем, что любая триангуляция T , удовлетворяющая условиям задачи, обязательно совпадает с той, которую мы построили выше (соединив близкие точки).

Предположим, что некоторая точка P соединена с далекой от нее точкой R . Центр O любой окружности, проходящей через P и R , лежит на оси $l(P, R)$ и (поскольку P и R — далекие точки) отделен от P некоторой прямой $l(P, Q)$, где Q — близкая к P точка; следовательно, Q лежит внутри окружности. Значит, PR не может быть стороной треугольника триангуляции T .

Итак, мы доказали, что в триангуляции T могут быть соединены лишь пары близких точек. Но для того чтобы получить триангуляцию, то есть разбиение $S(B)$ на треугольники с вершинами B , как мы видели, надо соединить все пары близких точек.

Замечание: вы, наверное, обратили внимание на то, что требование, чтобы никакие 4 точки не лежали на окружности, является излишним для доказательства единственности. Достаточно потребовать, чтобы любая окружность, проходящая через 4 точки из B , содержала бы внутри по крайней мере одну точку из B .

Подумайте, как можно обобщить эту задачу и ее решение на конечные множества точек, лежащие в трехмерном пространстве.

Ф. В. Вайнштейн,
Н. Б. Васильев

◆ Сумма квадратов трех последовательных целых чисел $a-1, a, a+1$ равна $3a^2 + 2$. При делении на 9 это число дает в остатке 2 или 5. Однако куб любого целого числа либо делится на 9, либо дает в остатке 1 или 8 ($(3k \pm 1)^3 = 27k^3 \pm 27k^2 + 9k \pm 1$).

Ю. И. Ионин

◆ Пусть A и B — точки пересечения прямой l с контуром многоугольника, h и k — отрезки его проекции на перпендикулярную ей прямую, $h > k$ (рис. 1: отрезок h — проекция голубой, k — красной половины многоугольника). Докажем, что $h/k \leq 1 + \sqrt{2}$. Соединим самую далекую от l точку C многоугольника в голубой полуплоскости (она проектируется в конец отрезка h) с точками A и B и продолжим отрезки CA и CB до пересечения в точках E и F с прямой, параллельной l и содержащей самую далекую от l точку G в красной полуплоскости (эта прямая проходит через конец отрезка k). Поскольку многоугольник выпуклый, отрезки AC и BC и весь $\triangle ABC$ содержится в голубой половине многоугольника, а отрезки EA и BF лежат вне многоугольника, так что трапеция $EABC$ содержит его красную половину. Поскольку площади той и другой половины многоугольника равны, то площадь трапеции $EABC$ не меньше площади $\triangle ABC$, поэтому $S_{EBCF} \geq 2S_{ABC}$, а поскольку треугольники ECF и ACB подобны, причем коэффициент подобия (отношения высот) $(k+h)/h$, то

$$\left(\frac{k+h}{h}\right)^2 \geq 2, \quad \frac{k}{h} + 1 \geq \sqrt{2}, \quad \frac{h}{k} \leq \sqrt{2} + 1.$$

Из решения видно, что равенство достигается только для треугольников, одна сторона которых параллельна l .

б) Пусть каждая из прямых l_1, l_2 и l_n делит площадь фигуры пополам, $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7$ — площади частей, на которые фигура разбивается этими прямыми (см. рис. 2), а S — площадь всей фигуры.

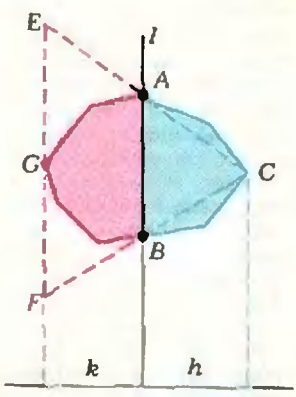


Рис. 1.

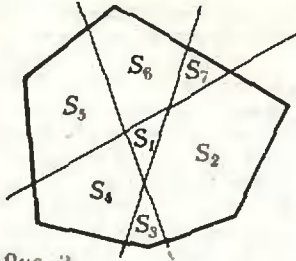


Рис. 2.

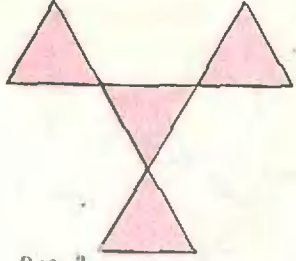


Рис. 3.

Поскольку $S_3 + S_4 + S_5 = S_3 + S_2 + S_7 = \frac{S}{2}$, то $S_4 + S_5 = S_2 + S_7$, и поэтому $S_3 = S_1 + S_6$. Значит, $S_3 > S_1$.

Кроме того, $\frac{1}{2} S = S_2 + S_4 + S_5 + S_7$, откуда следует, что $\frac{1}{2} S > 2S_1$, то есть $S_1 < \frac{1}{4} S$. Равенство достигается для невыпуклой фигуры, показанной на рисунке 3.

Пункты а) и б) этой задачи возникли при попытках выяснить, каким может быть отношение площади треугольника S_1 , ограниченного тремя прямыми l_1, l_2, l_3 , каждая из которых делит площадь данного выпуклого многоугольника пополам, к площади S всего многоугольника. По-видимому, это отношение наибольшее в случае, когда исходный многоугольник является треугольником, а прямые l_1, l_2, l_3 параллельны его сторонам, то есть всегда спра-

ведливо неравенство $S_1 < \alpha S$, где $\alpha = \frac{17 - 12\sqrt{2}}{2} \approx 0.0147$.

Попробуйте выяснить, верно ли это.

В. В. Прасолов

М768. Сумма n чисел, каждое из которых не превосходит по модулю 1, равна s . Докажите, что из них можно выбрать несколько чисел так, что сумма выбранных чисел будет отличаться от $s/3$ не более чем на $1/3$.

Докажем, что данные числа можно разбить на три группы так, что суммы чисел в этих группах $s_1 < s_2 < s_3$ отличаются не более чем на 1, то есть $s_3 - s_1 < 1$. (Мы допускаем и «пустые» группы, состоящие из 0 чисел — сумма чисел в такой группе считается равной 0.) Для этого достаточно выбирать числа в произвольном порядке по одному и записывать в три столбика, причем каждое очередное число добавлять в тот столбик, где сумма чисел a и b о л ь ш а я, если это число отрицательно, и в тот столбик, где сумма a и m е н ь ш а я, если это число неотрицательно (вначале мы возьмем три числа одного знака из данных n чисел и запишем их первыми в разные столбики). Легко видеть, что после каждого шага суммы чисел в столбиках отличаются не более чем на 1, так что в результате мы получим нужное разбиение*).

Теперь проверим, что средняя по величине сумма s_2 удовлетворяет требованиям $-1/3 < s_2 - s/3 < 1/3$, где $s = s_1 + s_2 + s_3$ — сумма всех чисел:

$$3s_2 < (s_1 + 1) + s_2 + s_3 = s + 1,$$

$$3s_2 < s_1 + s_2 + (s_3 - 1) = s - 1.$$

Интересно выяснить (для каждого θ между 0 и 1), для какого наименьшего $d = d(\theta)$ верно аналогичное неравенство $|s' - \theta s| < d$, где s — сумма произвольных n чисел,

* Подобный алгоритм был использован в решении задачи М575 — одной из самых трудных задач Всесоюзной олимпиады в Тбилиси 1975 года. Заметим, что для $n=3$ и $n=4$ чисел, среди которых не более двух чисел одного знака, средняя группа у нас может оказаться пустой; убедиться в справедливости утверждений задачи (наличие иезустой группы из одного или нескольких чисел с нужной суммой) можно с помощью перебора.

s' — сумма некоторой группы из них. (Простые примеры показывают, что для $\theta = 1/3$ оценку $d = 1/3$ нельзя заменить меньшей.)

В. И. Гринберг

М769. Биссектрисы треугольника ABC пересекаются в точке L , их продолжения пересекают описанную окружность треугольника в точках A_1, B_1, C_1 (рис. 2). Пусть R — радиус описанной, r — радиус вписанной окружностей треугольника ABC . Докажите равенства

$$а) \frac{|LA_1| \cdot |LC_1|}{|LB|} = R;$$

$$б) \frac{|LA| \cdot |LC|}{|LB_1|} = 2r;$$

$$в) \frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{2r}{R}.$$

а) Заметим сначала (обозначения ясны из рисунка), что $\widehat{A_1LB} = \widehat{LBA_1}$ (это следует из того, что угол $\widehat{A_1LB}$ — внешний для треугольника ALB и поэтому $\widehat{A_1LB} = \alpha + \beta$. С другой стороны, по свойству вписанного угла, $\widehat{A_1BL} = \widehat{CBA_1} + \widehat{CBB_1} = \alpha + \beta$. Поэтому $|A_1B| = |A_1L|$. Аналогично, $|CL| = |BC_1|$.

По теореме синусов, $|A_1B| = 2R \sin \alpha$, $|C_1B| = 2R \sin \gamma$. Из $\triangle A_1LB$ получаем $|LB| = 2|A_1L| \sin \gamma = 4R \sin \alpha \cdot \sin \gamma$.

$$\text{Итак, } \frac{|A_1L| \cdot |C_1L|}{|BL|} = \frac{2R \sin \alpha \cdot 2R \sin \gamma}{4R \sin \alpha \cdot \sin \gamma} = R.$$

б) Поскольку $|A_1L| = \frac{r}{\sin \alpha}$, $|CL| = \frac{r}{\sin \gamma}$, а $|B_1L| = \frac{|CL|}{2 \sin \alpha} = \frac{r}{2 \sin \alpha \cdot \sin \gamma}$ ($\triangle B_1CL$ — равнобедренный,

причем $|B_1C| = |B_1L|$), то $\frac{|AL| \cdot |CL|}{|B_1L|} = 2r$.

в) По известной формуле, $S_{ABC} = \frac{abc}{4R}$, $S_{A_1B_1C_1} = \frac{a_1b_1c_1}{4R}$,

и поэтому $\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{abc}{a_1b_1c_1}$. Из подобия $\triangle CLB \sim \triangle B_1LC_1$

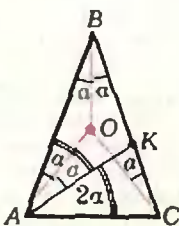
следует, что $\frac{a}{a_1} = \frac{|LB|}{|LC_1|}$. Аналогично, $\frac{b}{b_1} = \frac{|CL|}{|LA_1|}$;

$\frac{c}{c_1} = \frac{|LA|}{|LB_1|}$. Итак, $\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{|LA| \cdot |LB| \cdot |LC|}{|LA_1| \cdot |LB_1| \cdot |LC_1|} = \frac{2r}{R}$ по доказанному в пунктах а) и б).

Из решения задачи нетрудно получить неравенство $2r < R$, а также соотношение $|AL| \cdot |LA_1| = 2Rr$, которое удобно использовать при доказательстве формулы Эйлера $d^2 = R^2 - 2Rr$, где d — расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей треугольника. Ряд интересных следствий результатов задачи можно получить, заметив, что прямые A_1A , B_1B , C_1C содержат высоты $\triangle A_1B_1C_1$; одно из них: площадь треугольника равна половине произведения радиуса описанной окружности на периметр треугольника, обусловленного основаниями высот.

Р. А. Мазов

М771. В треугольнике ABC проведена биссектриса AK . Известно, что центры окружностей: вписанной в треугольник ABK и описанной около треугольника ABC — совпадают. Найдите углы треугольника ABC .



Ответ: $\widehat{A} = \widehat{C} = 72^\circ$, $\widehat{B} = 36^\circ$. Пусть O — общий центр указанных в условии окружностей. Тогда AO и BO — биссектрисы углов KAB и ABC соответственно (см. рисунок). Кроме того, точка O равноудалена от вершин треугольника ABC , поэтому треугольники AOB , BOC и COA равнобедренные. Следовательно, если $\widehat{OAB} = \alpha$, то $\widehat{OAK} = \widehat{OAB} = \widehat{OBA} = \widehat{OBC} = \widehat{OCB} = \alpha$. Отсюда $\widehat{ABC} = 2\alpha$, $\widehat{CAB} = 2\widehat{KAB} = 4\alpha$, $\widehat{BCA} = \widehat{BCO} + \widehat{OCA} = \alpha + (\widehat{OAK} + \widehat{KAC}) = 4\alpha$. А так как сумма углов треугольника равна 180° , $\widehat{ABC} + \widehat{CAB} + \widehat{BCA} = 2\alpha + 4\alpha + 4\alpha = 10\alpha = 180^\circ$, и поэтому $\alpha = 18^\circ$, $\widehat{ABC} = 36^\circ$, $\widehat{CAB} = \widehat{BCA} = 72^\circ$.

М772. В мастерской имеется пять различных станков. Обучение одного рабочего работе на одном станке стоит 1000 рублей. С какими наименьшими затратами можно обучить 8 рабочих так, чтобы при отсутствии любых трех из них все станки могли быть одновременно использованы в работе? Каждый рабочий может одновременно работать только на одном станке.

Ответ: 20 000 рублей. На каждом станке должны уметь работать по меньшей мере четверо рабочих: если на каком-нибудь станке умеют работать только трое (или меньше) рабочих, то при их отсутствии станок будет простаивать. Следовательно, расходы на обучение не могут быть меньше $5 \cdot 4 \cdot 1000 = 20\,000$ рублей. Как видно из таблиц 1 и 2, задающих две разные схемы обучения, этой сум-

Таблица 1

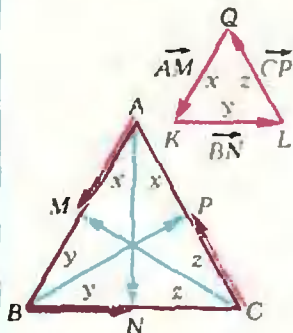
Ра- бо- чий	Станки							
	1	2	3	4	5	6	7	8
№ 1	+	+	+	+	0	0	0	0
№ 2	+	+	+	0	+	0	0	0
№ 3	+	+	+	0	0	0	+	0
№ 4	+	+	+	0	0	0	+	0
№ 5	+	+	+	0	0	0	0	+

Таблица 2

Ра- бо- чий	Станки							
	1	2	3	4	5	6	7	8
№ 1	+	+	+	+	0	0	0	0
№ 2	0	+	+	+	+	0	0	0
№ 3	0	0	+	+	+	+	+	0
№ 4	0	0	0	+	+	+	+	0
№ 5	0	0	0	0	+	+	+	+

мой можно обойтись. (В таблицах в столбце каждого рабочего плюсами отмечены станки, на которых он обучен работать.) Условие задачи удовлетворяют также все таблицы, получающиеся из таблиц 1 и 2 перестановкой столбцов (перенумерация рабочих) и строк (перенумерация станков).

М773. Окружность, описанная в треугольник ABC, касается его сторон AB, BC и AC в точках M, N и P соответственно. Известно, что $\vec{AN} + \vec{BP} + \vec{CM} = \vec{0}$. Докажите, что треугольник ABC правильный.



Преобразуем условие задачи:

$$\vec{0} = \vec{AN} + \vec{BP} + \vec{CM} = (\vec{AB} + \vec{BN}) + (\vec{BC} + \vec{CP}) + (\vec{CA} + \vec{AM}) = (\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA}) + (\vec{BN} + \vec{CP} + \vec{AM}),$$

то есть $\vec{AM} + \vec{BN} + \vec{CP} = \vec{0}$. Значит, откладывая векторы \vec{AM} , \vec{BN} и \vec{CP} один за другим, начиная с произвольной точки Q (см. рисунок) мы получим треугольник QKL.

Обозначим длины сторон треугольника QKL через $x = |QK| = |AM|$, $y = |KL| = |BN|$ и $z = |LQ| = |CP|$. Тогда $|AB| = |AM| + |MB| = |AM| + |BN| = x + y$, так как по свойству касательных, проведенных из одной точки, $|BM| = |BN|$; аналогично $|BC| = y + z$, $|CA| = z + x$. Треугольники ABC и QKL имеют соответственно параллельные стороны, поэтому они подобны и $|AB| : |QK| = |BC| : |KL| = |CA| : |LQ|$. Следовательно,

$$\frac{x+y}{x} = \frac{y+z}{y} = \frac{z+x}{z} = \frac{(x+y) + (y+z) + (z+x)}{x+y+z} = 2.$$

Итак, $x+y=2x$, $y+z=2y$. Откуда $x=y=z$ и $|AB| = |BC| = |CA|$.

И. Б. Гусятников, С. В. Развигин

М774. Функция $f(x)$, определенная на отрезке $[0; 1]$, такова, что

$$f(0) = f(1) = 0 \quad (1)$$

и

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq f(x) + f(y) \quad (2)$$

для всех $x, y \in [0; 1]$.

Докажите, что

а) $f(x) \geq 0$ при всех $x \in [0; 1]$;

б) $f(x)$ имеет бесконечно много нулей на отрезке $[0; 1]$;

а) Полагая в неравенстве (2) условия задачи $x=y$, получим, что $f(x) \leq 2f(x)$, то есть $f(x) \geq 0$.

б) Докажем, что $f(x) = 0$ для всех двоично-рациональных $x \in [0; 1]$, то есть для чисел вида $x = k/2^n$, где $k = 0, 1, \dots, 2^n$, $n = 0, 1, 2, \dots$ (очевидно, множество таких чисел бесконечно). Доказательство проведем индукцией по n .

При $n=0$ на отрезке $[0; 1]$ имеются только два двоично-рациональных числа — 0 и 1. По условию, $f(0) = f(1) = 0$.

Теперь остается показать, что из предположения $f(k/2^n) = 0$ при $k = 0, 1, \dots, 2^n$ вытекает равенство $f(k/2^{n+1}) = 0$ при всех $k = 0, 1, \dots, 2^{n+1}$. Если k четно, $k = 2l$, то $f(k/2^{n+1}) = f(l/2^n) = 0$ по предположению индукции. Если же $k = 2l + 1$, то

в) если существует такое число $A > 0$, что для всех $x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$ выполнено

неравенство $f(x) < A$, то $f(x) < A$ для каждого $x \in [0; 1]$;

г)* если функция $f(x)$ непрерывна хотя бы в одной точке x_0 отрезка $[0; 1]$, то $f(x) = 0$ для всех $x \in [0; 1]$;

д)* существуют функции $f(x)$, удовлетворяющие условиям (1), (2), не равные тождественно нулю.

$$f\left(\frac{k}{2^{n+1}}\right) = f\left(\frac{1}{2}\left(\frac{l}{2^n} + \frac{l+1}{2^n}\right)\right) < f\left(\frac{l}{2^n}\right) + f\left(\frac{l+1}{2^n}\right) = 0.$$

В то же время $f(k/2^{n+1}) > 0$ в силу а); следовательно, $f(k/2^{n+1}) = 0$.

в) Пусть $f(a) < A$ и b — середина отрезка $[a; 1]$ ($b = (a+1)/2$), тогда $f(b) < f(a) + f(1) < A$. Поэтому, если неравенство $f(x) < A$ выполняется для всех точек некоторого отрезка $I \subset [0; 1]$, оно справедливо и для середины всех отрезков $[a; 1]$, где $a \in I$, то есть для всех точек отрезка I' , который получается из отрезка I при гомотетии с коэффициентом $\frac{1}{2}$ и центром в точке E оси Ox с абсциссой $x = 1$

(см. рисунок). По условию оно выполняется на отрезке $I_1 = \left[0; \frac{1}{2}\right]$, следовательно, и на отрезке $I_2 = I'_1 =$

$$= \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right], \text{ далее, на отрезке } I_3 = I'_2 = \left[\frac{3}{4}; \frac{5}{8}\right] \text{ и, вооб-}$$

$$\text{ще, на любом из отрезков } I_n = \left[1 - \frac{1}{2^{n-1}}; 1 - \frac{1}{2^n}\right]$$

($n = 1, 2, \dots$). Но объединение этих отрезков — это весь полуинтервал $[0; 1[$. А поскольку $f(1) = 0 < A$, неравенство $f(x) < A$ верно при любом $x \in [0; 1]$.

Очевидно, что точно таким же образом можно распространять неравенство $f(x) < A$ с произвольного отрезка $[a; b]$ длины $l = b - a$ на больший отрезок $[a; c]$ при $b < c \leq b + l$ (или $[c; b]$ при $a - l < c < a$), если только

$$f(c) = 0. \text{ (В нашем рассуждении было } a = 0, b = \frac{1}{2}, c = 1.)$$

А так как $f(x) = 0$ при всех двоично-рациональных x (пункт б)) и на любом отрезке имеются двоично-рациональные точки, отсюда вытекает, что если $f(x) < A$ на произвольном промежутке, содержащемся в отрезке $[0; 1]$, то $f(x) < A$ для всех $x \in [0; 1]$.

г) Пусть функция f непрерывна в точке x_0 и $f(x_0) = y_0$. По определению это означает, что $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$, то есть

для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta > 0$, что $y_0 - \varepsilon < f(x) < y_0 + \varepsilon$ при $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$. В интервале $I_\varepsilon =]x_0 - \delta; x_0 + \delta[$ имеются двоично-рациональные точки; пусть x_1 — одна из них. Тогда в силу б) $f(x_1) = 0$, поэтому $y_0 - \varepsilon < f(x_1) = 0$ или $y_0 < \varepsilon$. Следовательно, $f(x) < y_0 + \varepsilon < 2\varepsilon$ для всех $x \in I_\varepsilon$ и согласно доказанному выше (см. п. а) и коней п. в)) $0 < f(x) < 2\varepsilon$ при всех $x \in [0; 1]$. Поскольку ε здесь — произвольное положительное число, $f(x) \equiv 0$.

д) Определим функцию $f(x)$ при $x \in [0; 1]$ равенством

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \text{ — рациональное число,} \\ 1, & \text{если } x \text{ — иррациональное число.} \end{cases}$$

Тогда $f(0) = f(1) = 0$. Докажем, что $f\left(\frac{x+y}{2}\right) < f(x) + f(y)$.

Левая часть этого неравенства всегда не больше 1, поэтому оно заведомо выполняется, если хотя бы одно из чисел x и y иррационально (ибо тогда $f(x)$ или $f(y)$ равно 1). Если же и x , и y — рациональные числа, то их полусумма $\frac{x+y}{2}$ также рациональна и $f\left(\frac{x+y}{2}\right) = 0 = f(x) + f(y)$.

И. Б. Гусятников

◆
Ф783. Горизонтально расположенный невесомый стержень длины $3l$ с закрепленными на нем грузами с массами m_1 и m_2 удерживается в положении равновесия при помощи двух вертикальных нитей. Определить силу натя-

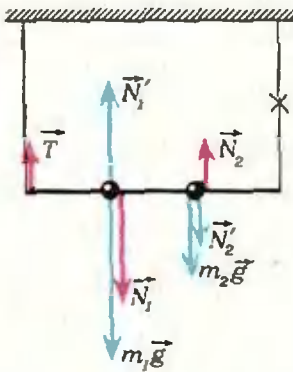
В момент обрыва правой нити на стержень действуют сила \vec{T} натяжения левой нити и силы \vec{N}_1 и \vec{N}_2 нормального давления грузов m_1 и m_2 . Поскольку стержень невесом,

$$\vec{T} + \vec{N}_1 + \vec{N}_2 = \vec{0},$$

$$N_1 l = 2N_2 l.$$

Из второго уравнения (условие равенства нулю суммы

жения левой нити в первый момент времени, если правую нить перерезают.



моментов всех сил относительно точки O) следует:

$$N_1 = 2N_2, \quad \vec{N}_1 = -2\vec{N}_2. \quad (1)$$

С учетом этих соотношений получим (см. рисунок):

$$T = N_1 - N_2 = N_2. \quad (2)$$

Ускорения грузов m_1 и m_2 в первый момент после обрыва правой нити будут направлены вертикально (точка O неподвижна, стержень нерастяжим) и связаны соотношением

$$a_2 = 2a_1. \quad (3)$$

Запишем уравнения движения грузов в этот момент:

$$\begin{aligned} m_1 g - N_1' &= m_1 a_1, \\ m_2 g + N_2' &= m_2 a_2, \end{aligned}$$

где N_1' и N_2' — модули сил \vec{N}_1' и \vec{N}_2' реакции стержня, действующих на грузы m_1 и m_2 . Поскольку $N_1' = N_1$ и $N_2' = N_2$, с учетом соотношений (1) и (3) получаем:

$$\begin{aligned} m_1 g - 2N_2 &= m_1 a_1, \\ m_2 g + N_2 &= 2m_2 a_1. \end{aligned}$$

Отсюда находим N_2 , а следовательно (см. (2)), и T :

$$T = \frac{m_1 m_2}{m_1 + 4m_2} g.$$

С. С. Кротов

Ф784. На движущееся с постоянной скоростью v тело начинает действовать постоянная сила F . Спустя время t скорость тела стала равной $v/2$. За следующий такой же интервал времени скорость уменьшилась еще в два раза. Определить, чему будет равна скорость тела спустя интервал времени $3t$ с начала действия силы F .

Из условия задачи следует, что сила \vec{F} направлена под некоторым углом $\alpha \neq 0$ к вектору начальной скорости тела \vec{v} (в противном случае, то есть при $\alpha = 0$, изменения скорости за одинаковые промежутки времени были бы одинаковы).

Пусть \vec{OA} — вектор начальной скорости тела, \vec{AB} — вектор изменения скорости за время t с начала действия силы \vec{F} (см. рисунок). Тогда \vec{OB} — вектор, равный по модулю скорости $v_1 = v/2$ тела через время t . Отложим от точки B вектор \vec{BC} , составляющий угол α с направлением вектора \vec{OA} и равный по модулю $|\vec{AB}|$. Тогда вектор \vec{OC} будет равен по модулю скорости $v_2 = v/4$ тела спустя время $2t$ с начала действия силы \vec{F} . Повторив еще раз такую же операцию, построим вектор \vec{OD} , равный по модулю скорости v_3 тела спустя время $3t$ с начала действия силы \vec{F} .

Пусть проекции вектора \vec{AB} на оси X и Y (см. рисунок) равны соответственно Δv_x и Δv_y . Тогда

$$(v + \Delta v_x)^2 + \Delta v_y^2 = v^2/4,$$

$$(v + 2\Delta v_x)^2 + (2\Delta v_y)^2 = v^2/16.$$

Учитывая, что модуль скорости v_3 должен удовлетворять соотношению

$$v_3^2 = (v + 3\Delta v_x)^2 + (3\Delta v_y)^2,$$

с учетом предыдущих уравнений находим v_3 :

$$v_3 = v\sqrt{7}/4.$$

С. К. Сергеев

Ф785. В стакане с водой плавает кусок льда. На поверхности воды налит слой масла (рис. 1). Как изменится уровень жидкости в стакане, когда лед растает? Куда сместится при этом граница раздела воды и масла?

Заменим мысленно масло водой, так, чтобы положение льда относительно стакана не изменилось. Поскольку плотность воды больше плотности масла, уровень воды в стакане в этом случае будет ниже, чем верхний уровень масла (рис. 2). В этой новой ситуации при таянии льда общий уровень жидкости не изменится (рис. 3).

Теперь «вернем» масло на место, убрав долитую воду (рис. 4). Часть масла заполнит «лунку», образовавшуюся при таянии льда.

Таким образом, общий уровень жидкости (вода + масло) после таяния льда понизится; уровень, на котором находится граница раздела масла и воды, повысится (рис. 5).

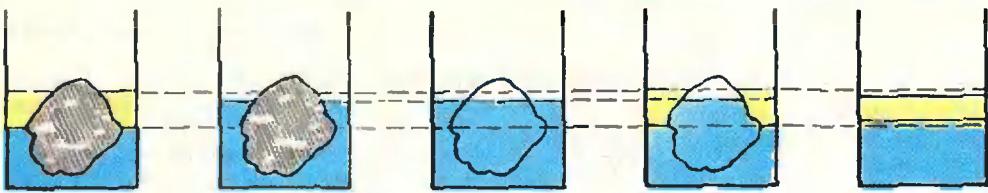


Рис. 1.

Рис. 2.

Рис. 3.

Рис. 4.

Рис. 5.

Ф786. В неидеальном одноатомном газе между молекулами действуют силы притяжения. Считая, что потенциальная энергия межмолекулярного взаимодействия пропорциональна плотности газа, то есть $P = \alpha \frac{N}{V}$, где N — число молекул газа, V — объем, занимаемый газом, α — коэффициент пропорциональности ($\alpha < 0$). Определить разность молярных теплоемкостей газа при постоянном давлении (c_p) и при постоянном объеме (c_v).

Справедливость этого качественного решения можно проверить количественным расчетом. Прodelайте это самостоятельно.

С. В. Казаков

Сообщим газу некоторое количество тепла ΔQ . Согласно первому закону термодинамики,

$$\Delta Q = \Delta U + A$$

где ΔU — изменение внутренней энергии газа, A — работа, совершаемая газом.

Внутренняя энергия неидеального газа складывается из кинетической энергии теплового движения молекул, которая является такой же, как в идеальном газе, и потенциальной энергии межмолекулярного взаимодействия: $U = U_{ид} + \Pi$. Из условия задачи следует, что между молекулами газа действуют силы притяжения. Действительно, тот факт, что энергия межмолекулярного взаимодействия отрицательна ($\alpha < 0$), означает, что для удаления любой молекулы из области взаимодействия необходимо совершить положительную работу, то есть преодолеть силы притяжения.

Пусть при сообщении газу малого количества тепла ΔQ объем, занимаемый газом, изменился на малую величину ΔV , а температура газа изменилась на ΔT . Изменение внутренней энергии газа —

$$\Delta U = \Delta U_{ид} + \Delta \Pi,$$

работа, совершаемая газом, —

$$A = p \cdot \Delta V.$$

Согласно условию задачи,

$$\begin{aligned} \Delta P &= \frac{\alpha N}{V + \Delta V} - \frac{\alpha N}{V} = \frac{\alpha N}{V} \left(\frac{1}{1 + \frac{\Delta V}{V}} - 1 \right) \approx \\ &\approx \frac{\alpha N}{V} \left(1 - \frac{\Delta V}{V} - 1 \right) = - \frac{\alpha N}{V^2} \cdot \Delta V. \end{aligned}$$

Изменение внутренней энергии идеального газа при изменении его температуры на ΔT равно

$$\Delta U_{ид} = C_V \cdot \Delta T,$$

где C_V — теплоемкость данной массы газа при постоянном объеме (при $\Delta V = 0$).

Таким образом, $\Delta U = C_V \cdot \Delta T - \frac{\alpha N}{V^2} \cdot \Delta V$, и

$$\begin{aligned} \Delta Q &= C_V \cdot \Delta T - \frac{\alpha N}{V^2} \cdot \Delta V + p \cdot \Delta V = \\ &= C_V \cdot \Delta T + \left(p - \frac{\alpha N}{V^2} \right) \cdot \Delta V. \end{aligned} \quad (1)$$

При отсутствии межмолекулярного взаимодействия (при решении задачи с моделью «идеальный газ»)

$$\Delta Q = C_V \cdot \Delta T + p' \cdot \Delta V,$$

где $p' = \frac{N}{V} kT$ — давление идеального газа. Таким образом, в результате действия межмолекулярных сил притяжения давление газа оказывается меньше давления идеального газа на величину

$$p' - p = - \frac{\alpha N}{V^2}$$

и равно

$$p = \frac{N}{V} kT + \frac{aN}{V^2} \quad (a < 0). \quad (2)$$

(Качественное объяснение этого факта очевидно: средняя сила, действующая на элемент поверхности стенки сосуда при соударении молекул со стенкой (именно эта сила и определяет давление газа), из-за притяжения ударяющихся о стенку молекул к молекулам, находящимся в глубине сосуда, оказывается меньше, чем при отсутствии этих сил притяжения, то есть меньше, чем в случае идеального газа.)

Соотношение (2) позволяет установить связь между ΔV и ΔT при постоянном давлении. Перепишем это соотношение в виде

$$NkT = V \left(p - \frac{aN}{V^2} \right).$$

Тогда

$$\begin{aligned} Nk \cdot \Delta T &= \Delta V \cdot \left(p - \frac{aN}{V^2} \right) + \frac{2aN}{V^2} \cdot \Delta V = \\ &= \left(\frac{NkT}{V} + \frac{2aN}{V^2} \right) \cdot \Delta V, \end{aligned}$$

откуда

$$\Delta V = \frac{NkV^2}{NkTV + 2aN} \cdot \Delta T. \quad (3)$$

Подставив в равенство (1) найденные выражения (2) и (3) для p и ΔV , получим:

$$\Delta Q = C_V \cdot \Delta T + \frac{Nk}{1 + 2a/VkT} \cdot \Delta T.$$

Следовательно, теплоемкость данной массы газа при постоянном давлении равна

$$C_p = \frac{\Delta Q}{\Delta T} = C_V + \frac{Nk}{1 + 2a/VkT}.$$

Разность молярных теплоемкостей газа при постоянном давлении и при постоянном объеме равна

$$c_p - c_v = \frac{N_A k}{1 + 2a/VkT} = \frac{R}{1 + 2a/VkT}.$$

(Заметим, что теплоемкость C_p зависит от объема, занимаемого газом, что является прямым следствием взаимодействия молекул. Теплоемкость же C_V — такая же, как и у идеального газа, поскольку при постоянном объеме потенциальная энергия межмолекулярного взаимодействия в газе не меняется.)

В. В. Тугушев

◆ Пусть напряжение источника $U = at$, где $a = \text{const}$. Тогда в моменты времени t_1 и t_2 после замыкания ключа выполняются условия

$$at_1 = RI + \frac{Q_1}{C},$$

$$at_2 = RI + \frac{Q_2}{C},$$

где I — постоянный ток, текущий через резистор, Q_1 и Q_2 — заряды на конденсаторе в моменты t_1 и t_2 . Вычтя из второго равенства первое, получим

$$a(t_2 - t_1) = \frac{Q_2 - Q_1}{C} = \frac{I(t_2 - t_1)}{C},$$

откуда $I = aC$.

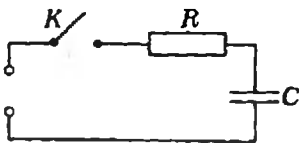
В момент времени t_x , в который замкнули ключ K (отсчет времени ведется от момента $t = 0$ при $U = 0$), заряд на конденсаторе был равен нулю, и выполнялось условие $at_x = RI = RaC$.

Отсюда находим t_x :

$$t_x = RC.$$

А. Р. Зильберман

Ф787. Напряжение на источнике меняется со временем по линейному закону. В начальный момент напряжение было равно нулю. С помощью ключа K источник можно подключить к схеме, приведенной на рисунке. В какой момент нужно замкнуть ключ, чтобы ток в цепи был постоянным по величине? Сопротивление резистора R , емкость конденсатора C .



Задачи республиканских олимпиад

Многие наши читатели уже включились в начальные этапы очередного цикла Всесоюзной физико-математической олимпиады школьников. «Квант» ежегодно в одном из последних номеров рассказывает о заключительном (всесоюзном) этапе и публикует полный список предлагавшихся там задач. Здесь мы печатаем некоторые задачи республиканских олимпиад 1981 и 1982 гг. Задачи 1–5 взяты из рекомендательного списка задач республиканского этапа, составляемого методической комиссией по математике Центрального оргкомитета олимпиады; остальные задачи были предложены местными жюри. После задачи в скобках указан класс, в котором она предлагалась.

1. Числа a, b, c удовлетворяют соотношениям

$$\frac{-a+b+c}{a} = \frac{a-b+c}{b} = \frac{a+b-c}{c}.$$

Чему может равняться число

$$p = \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc} ? \quad (8)$$

2. Докажите, что для любых чисел p и q суммарная длина отрезков оси Ox , на которых выполняется неравенство $|x^2 + px + q| < 2$, не превосходит 4. (9)

3. Всюду определенная функция f при любых x и y удовлетворяет соотношению $f(xy) = f(x) \cdot f(y) - f(x+y) + 1$, причем $f(1) = 2$. Найдите: а) $f(m)$ для произвольного целого m ; б) $f\left(\frac{m}{n}\right)$ для произвольного рационального числа $\frac{m}{n}$. (9)

4. Докажите, что многочлен $3x^{1982} + 4$ нельзя представить в виде суммы квадратов трех многочленов с целыми коэффициентами. (10)

5. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$; прямые AB и CD пересекаются в точке M , а прямые AD и BC — в точке K . Докажите неравенство $S_{ABCD} > (|AB| \cdot |CD| \times \sin \widehat{AMD} + |BC| \cdot |AD| \cdot \sin \widehat{AKB}) / 2$. (10)

6. Докажите, что множество чисел 1, 2, 3, ..., 1413, 1414 можно разбить на группы так, чтобы сумма чисел в каждой группе равнялась 1981. (8)

7. Найдите длину стороны наименьшего квадрата, в котором можно поместить без наложений три круга радиусов 1, 2, 2. (8)

8. Последовательность (a_n) определяется следующим образом: из последовательности натуральных чисел 1, 2, 3, ... берем первые три числа (то есть $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3$), затем

следующие два числа пропускаем и берем три числа (то есть $a_4 = 6, a_5 = 7, a_6 = 8$), четыре числа пропускаем, три числа берем, шесть пропускаем и т. д. Вычислите a_{1000} . (8)

9. Чемпионат страны по футболу проходит в два круга. По его окончании выяснилось, что команды набрали очки в арифметической прогрессии, и последняя команда имеет 17 очков. Сколько команд участвовало в чемпионате? (8)

10. В пятиугольнике проведены все диагонали. Какие семь углов между диагоналями или диагоналями и сторонами надо отметить, чтобы из равенства друг другу этих углов следовало, что пятиугольник правильный? (8)

11. Вычислите при каждом a предел $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{|(n+a)^2|} - n)$, где $[x]$ означает наибольшее целое число, не превосходящее x . (9)

12. Пусть m_a, m_b, m_c — длины медиан

$\triangle ABC$. Докажите, что $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 > \frac{3}{4} \sqrt{abc} (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})$. Для каких треугольников достигается знак равенства? (9)

13. Точка с координатами $(x(t), y(t))$ движется в плоскости так, что в каждый момент времени t выполнены равенства $y'(t) = \frac{1}{x(t)}, x'(t) = -\frac{1}{y(t)}$. Известно, что в некоторый момент времени точка имела координаты (12; 3). Может ли эта точка в некоторый другой момент времени иметь координаты (6; 5)? (9)

14. Докажите неравенство

$$\left(1 + \frac{1}{2^{51}}\right) \left(1 + \frac{1}{2^{52}}\right) \left(1 + \frac{1}{2^{53}}\right) \dots \times \left(1 + \frac{1}{2^{100}}\right) < 1 + \frac{1}{2^{49}}. \quad (9)$$

15. Сколько звеньев может содержать замкнутая ломаная в пространстве, если ее смежные звенья взаимно перпендикулярны? (10)

16. Докажите, что площадь фигуры, ограниченной осями Ox и Oy , прямой $x = \frac{\pi}{2}$ и графиком функции $y = \frac{\sin x}{x}$, не меньше 1. (10)

17. Докажите, что если для всех $x \in]-1; 1[$ выполняется неравенство $|a_1 \sin b_1 x + a_2 \sin b_2 x + \dots + a_n \sin b_n x| < |\sin x|$, то

$$|a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n| < 1. \quad (10)$$

18. Существует ли пирамида, у которой сумма плоских углов каждого многогранного угла равна а) 150° , б) 210° , в) 180° ? (10)

19. Автобусные билеты занумерованы натуральными числами от 000 001 до 999 999. Сколько всего цифр 1 встречается на билетах? (10)

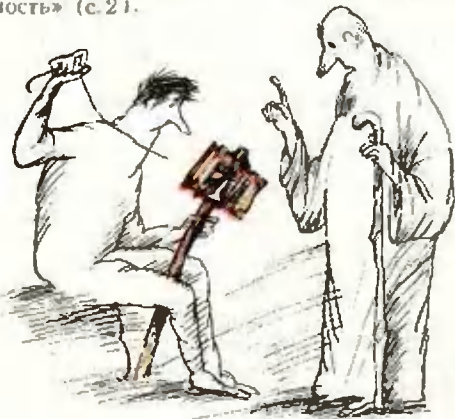
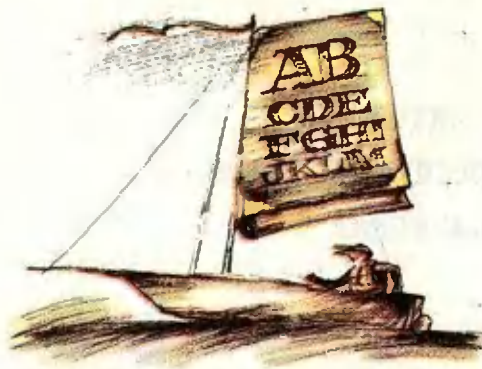
20. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 14, \\ xy + xz + yz = 11, \\ xyz = 6. \end{cases} \quad (10)$$

Публикацию подготовила
Т. А. Сарычева

КВАНТ УЛЫБАЕТСЯ

Когда в 1981 году член-корреспондент АН СССР А. П. Ершов получил предложение выступить с установочным докладом на открытии конференции «Применение ЭВМ в обучении» в Лозанне, ему пришла мысль проиллюстрировать свой доклад не только техническими схемами и графиками, как это обычно делается, но и рисунками, отображающими в ассоциативной форме его основные идеи. Такие рисунки сделал по его просьбе художник М. М. Златковский; они показывались одновременно с докладом с помощью дикскапа. Здесь мы публикуем подборку этих рисунков. В качестве подписей к ним мы поместили отрывки из статьи А. П. Ершова «Программирование — вторая грамотность» (с. 2).



Словами и примером старший (учитель) обучал младшего (ученика) делу. Понимание было не чисто умственным оварением, а овладением приемами изучаемого дела.

Отделился процесс накопления знаний от их применения, появились новые формы жажды знаний и новые ощущения постижения истины.



Мы все помним простые и емкие слова Максима Горького: «Любите книгу, источник знания».



В 1962 г. во всем мире было напечатано 10 млрд. книг.





В настоящее время способность человека передавать знания машине безнадежно отстает от способности создать эту машину.

Программы буквально напичкан наш организм, само развитие организма есть выполнение генетической программы.



ЭВМ уже есть во многих школах и будет приходить туда в нарастающих количествах.

Грамотность и программирование дополняют друг друга, и вместе составляют новое представление о гармонии человеческого ума.



КВАНТ УЛЫБАЕТСЯ КВАНТ УЛЫБАЕТСЯ КВАНТ УЛЫБАЕТСЯ КВАНТ УЛЫБАЕТСЯ



Стандартные приемы программирования

Урок 5. Сколько будет 2×2 на ЭВМ, или Машинная арифметика и как с нею бороться

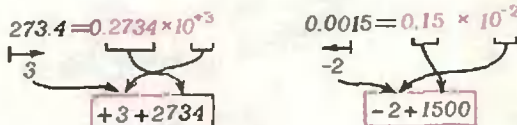
Знание ответа на вопрос «Сколько будет 2×2 ?» является совершенно необходимым для человека, который претендует на знание математики хотя бы в объеме начальной школы. А как отвечает на этот вопрос ЭВМ? Неожиданность заключается в том, что на ЭВМ

$2 \times 2 = 4$
но $2.0 \times 2.0 \neq 4.0$, точнее $2.0 \times 2.0 \approx 4.0^*$

Дело в том, что *целые числа — точные, а действительные — приближенные*. Мало того, все числа еще имеют ограниченный диапазон изменения. Какие же выводы из этого должен сделать программист?

Рассмотрим приведенные в таблице решения подготовительных задач. Задачи, по-видимому, показались вам чрезвычайно легкими, и приведенные решения не вызывают сомнений. А тем не менее все решения не верны, точнее могут дать *неправильные результаты или не дать их вовсе*. И происходит это из-за особенностей машинной арифметики.

Действительные числа в ЭВМ представляются в так называемой *форме с плавающей точкой*, то есть число a представляется в виде $a \cdot n^p$, где $1/n < |a| < 1$, n — основание той системы счисления, в которой работает данная ЭВМ (как правило, это двоичная или шестнадцатеричная система, что, впрочем, для понимания сути дела совершенно неважно). Предположим, что наша ЭВМ работает в десятичной системе счисления и имеет 4 разряда под *мантиссу* и 1 разряд под *порядок*. Тогда (см. рис. 1) в ячейке памяти запоминаются



^{*}Для догадливых читателей сообщим, что 2.0×2.0 все же в точности равно 4.0, так как в 2.0 и 4.0 представляются в памяти точно. Но если один из сомножителей получается вычислением, то результат уже может оказаться не точным: $(1.0/3.0) \times 6.0 \neq 2.0$, так как промежуточный результат $1/3$ не может быть представлен точно на ЭВМ, работающих в двоичной или десятичной системе счисления.

только *цифры* и знак *мантиссы* и *порядка*, точка *подразумевается* перед первой цифрой *мантиссы*, а *порядок* показывает, в какую сторону и на сколько цифр «уплывнет» точка на самом деле (отсюда и термин «плавающая точка»). Таким образом, максимальное представление в нашей ЭВМ число — это 0.9999×10^9 , то есть около миллиарда.

Теперь рассмотрим задачу 2 и предположим, что $n=1000$, а все a_i имеют значения около 2×10^6 . Тогда попытка получить сумму элементов массива не даст результата, так как эту сумму нельзя записать в память ЭВМ. Чтобы избежать этого, формулу среднего арифметического надо переписать в виде

$$m = \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{n}$$

и программировать деление на n каждого a_i . Разумеется, это замедлит программу, но наша более короткая программа, приведенная в таблице, может просто не дать *результата*.

Теперь при том же $n=1000$ допустим, что

$$\sum_{i=1}^{999} a_i = 9555, \quad a_{999} = a_{998} = \dots = a_{1000} = 0.2.$$

При сложении a_{999} с накопленной суммой получим 0.95552×10^4 , но ЭВМ отбросит последний знак «2» (теряются разряды, вышедшие за границы разрядной сетки). Таким образом, последние 100 компонент не внесут свой вклад в результат и получатся грубая ошибка (равная $0.2 \times 100 = 20.0$).

(В данном случае следовало бы отдельно просуммировать все числа с малыми порядками, а затем использовать полученную сумму как элемент для дальнейшего суммирования.)

Можно привести примеры невыполнения в машинной арифметике ассоциативных и дистрибутивных законов*).

Реальные ЭВМ работают с гораздо большим диапазоном и большей точностью представления чисел, поэтому в большинстве случаев разница между машинной и обычной арифметикой не ощущается. Тем не менее известны случаи, когда программа на языке Фортран при переносе с ЭВМ БЭСМ-6 (которая работает с точностью около 12 десятичных знаков на ЭВМ серии ЕС (точность около 7 десятичных знаков) закидывалась: низкая точность ЕС ЭВМ приводила к ошибкам из-за накопления погрешностей.

Как правило, диапазона и точности ЭВМ хватает с избытком. Так, однократное сложение чисел с резко различающимися порядками нам не мешает: когда счет идет на миллионы, десятые доли не важны; а для потери точности при многократном сложении чисел близких порядков надо сделать около 10^8 сложений на ЕС ЭВМ и около 10^{13} на БЭСМ-6. Особенности машинной арифметики начинают сказываться, если нужна точность, близкая к точности ЭВМ, или если объем вычислений подходит к критическому для данной ЭВМ.

^{*}Посчитайте, сколько получится на нашей гипотетической четырехразрядной ЭВМ при вычислении $(a+b)c$ и $a+(bc)$, если $a=0.4440$, $b=0.00002$, $c=5$. Невыполнение ассоциативности вы только что видели на примере вычисления Σa_i .

Решение подготовительных задач

Задача 1 (таблица значений x^2) <pre>x := a; while x <= b do begin writeln (x, ' **2 = ', x**2); x := x+h end;</pre>
Задача 2 (среднее арифметическое). <pre>s := 0; for i := 1 to n do s := s + a[i]; s := s/n;</pre>
Задача 3 (поиск данного числа). <pre>k := 0; i := 1; while (i <= n) AND (k = 0) do begin if a[i] = x then k := i; i := i + 1 end;</pre>

В упомянутом примере с программой на фортране нужна была точность 10^{-5} при точности ЭВМ равной 10^{-7} , а точность 10^{-3} программа на ЕС ЭВМ обеспечивала.

Какие же выводы следуют из всего сказанного выше? Вывод один: программист должен быть морально готов к встрече с машинной арифметикой. Что конкретно он должен делать, встретившись с ней? Общего приема не существует, и приходится выбирать из следующих вариантов.

а) Доказать, что для данного алгоритма погрешности машинной арифметики не выходят за допустимые пределы.

б) Доказать то же при дополнительных условиях на исходные данные (установить, что при ваших данных все будет в порядке, хотя этого гарантировать в общем случае нельзя).

в) Разработать алгоритм, компенсирующий погрешности.

г) Использовать вычисления с увеличенной точностью (реализованные аппаратно или программно), в частности, прорешать программу на другой модели ЭВМ с более точной арифметикой.

На практике чаще всего используются варианты в) или г). В некоторых языках программирования (фортран и ПЛ/1, например) есть возможность указать, что вычисления надо вести с увеличенной точностью. Это на ЕС ЭВМ реализуется аппаратными средствами (с некоторым замедлением программы), а на БЭСМ-6 — программно (со значительным замедлением программы).

Действительные числа лучше не сравнивать на равенство.

так как с почти стопроцентной вероятностью получим результат «не равно». Поэтому оператор в задаче 3

```
if a[i] = x then...
надо заменить на
if abs (a[i] - x) < eps then...
```

где eps — константа, описанная, например, как $eps = 0.0001$ (в зависимости от точности ЭВМ и нужной вам точности). Тогда дейст-

вительные числа считаются равными, если они различаются не более чем на некоторое ϵ .

В задаче 1, если $a = 0$, $b = 1$, а $h = 0,1$, то у нас нет гарантии, что мы получим все 11 значений функции: после 10-кратного сложения x с h может получиться значение чуть меньше b , или чуть больше b , и в последнем случае для него уже цикл работать не будет. Для достижения нужного результата нужно либо организовать цикл с условием $while (x < b + h/2)$, либо заранее вычислить число повторений цикла $n := round((b - a)/h)$ и организовать цикл $for i := 0 to n do...$ Однако и этот путь может не привести к желаемому результату: если значение n (необходимое число шагов) получится достаточно большим, то при многократном выполнении оператора $x := x + h$ может накопиться погрешность, превосходящая значение h . Тогда цикл, организованный через $while$, выполнится на один (или даже несколько) раз меньше или больше, а цикл, организованный через for , выполнится нужное количество раз, но последнее значение будет весьма далеко от b . Для компенсации этого нам придется организовать цикл следующим образом:

```
n := round((b - a) / h);
for i := 0 to n do
begin x := a + i * h;
writeln (x, ' **2 = ', x**2)
end;
```

(Разумеется, эта программа будет работать медленнее, так как каждое вычисление значения аргумента требует больше операций.)

На трех простых примерах мы рассмотрели выполнение варианта в) — разработку специального алгоритма. Обратите внимание, что варианты в) и г) требуют выполнения в качестве составной части пунктов а) и б), чтобы убедиться, что разработанный алгоритм дает нужный эффект. Иногда это просто. Так, например, очевидно, что

$$\sum_{i=1}^k \frac{a_i}{n} < \max \{a_i\} \quad (k < n),$$

поэтому при счете по формуле $\sum \frac{a_i}{n}$ переполнение нам не грозит — доказан вариант а).

Но если $n \cdot \max \{a_i\}$ меньше максимального представимого числа, то можно работать

по формуле $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i$ — это вариант б):

при наших данных работать можно, хотя, вообще говоря, алгоритм таит опасность. Доказательства здесь были выполнены только эскизно, более подробно их предлагается выполнить самостоятельно (для этих простых случаев вам это доступно). В других случаях нужные доказательства а) или б) могут оказаться сложными.

Контрольное задание

5.1. Дана ЭВМ, работающая в r -ичной системе счисления с длиной мантиссы в n разрядов. Для задачи 1, разобранной выше, определите, при каких соотношениях между a , b , h , r и n можно строить таблицу циклом $while$ с последовательным увеличением x на величину h с тем, чтобы гарантировать правильное количество повторений цикла.

(Подготовительных задач к следующему (последнему) уроку не дается!)

Л. Ф. Штернберг



Ниже публикуются материалы вступительных экзаменов в вузы в 1982 году.

Новосибирский государственный университет им. Ленинского комсомола

Математика

Письменный экзамен

На выполнение работы было предоставлено 5 часов.

Вариант 1

(механико-математический, физический и экономический факультеты)

1. Решите уравнение

$$14x - 2x^2 = |x - 7|.$$

2. Решите уравнение

$$4 + 2\cos^2 x = 7\sin 2x.$$

Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

3. Дан ромб $ABCD$. Окружность радиуса R описана около треугольника ABD и проходит через центр окружности, вписанной в треугольник CBD . Определите площадь ромба.

4. Найдите все значения a , при каждом из которых ровно один корень уравнения $x^2 + 2(a-1)x + 3a + 1 = 0$ удовлетворяет неравенству $x < -1$.

5. Дан правильный тетраэдр $ABCD$ с ребром 1. Точка M — середина ребра CD , N — середина ребра BC , точка P принадлежит ребру AB , причем $|AP| = 3|BP|$. Сфера касается плоскостей ABC и ACD , причем точки ее касания с плоскостями лежат, соответственно, на прямых NP и AM . Найдите радиус сферы.

Вариант 2

(геолого-геофизический факультет и факультет естественных наук)

1. Найдите область определения и множество значений функции $f(x) = \sqrt{6x - x^2} - 5$.

2. Решите неравенство

$$\log_2(4x^4 + 3x^2 + 6) + \log_1(x^2 + 1) > \log_2(3x^2 + 6).$$

3. Угол между векторами $\vec{a} = \left(a; 1; \sqrt{\frac{6}{5}}\right)$ и $\vec{b} = (3; 1; 0)$ равен $\frac{\pi}{4}$. Найдите a (базис прямоугольный).

4. Решите уравнение

$$\sin\left(4x + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \sin 6x = \sin\left(10x - \frac{\pi}{4}\right).$$

5. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит правильный треугольник ABC со стороной 1, плоскости граней SAB и ABC перпендикулярны, $|SA| = |SB|$, высота пирамиды равна 1. На ребре SA выбрана точка M так, что $|MA| = 2|SM|$, точка N — середина ребра SC . Плоскость α проходит через точки B , M и N . Найдите расстояние от точки A до плоскости α .

Физика

Письменный экзамен

Физический факультет

Каждый вариант состоял из пяти задач трех типов. На решение задач давалось пять часов.

Первые три задачи — расчетные, различной трудности: от почти стандартных до сравнительно сложных, требующих смекалки, глубоких знаний, умения разобраться в непривычной или усложненной физической ситуации.

Четвертая задача — это задача-оценка. Для ее решения надо понять рассматриваемое физическое явление, сформулировать простую (так как нужна только оценка) физическую модель этого явления, выбрать разумные численные значения физических величин и, наконец, получить численный результат, более или менее соответствующий реальности. В тексте задачи подчеркивалось, что абитуриент, хорошо представляя явление, может сам выбрать необходимые для решения задачи физические величины и их численные значения.

Пятая задача — это задача-демонстрация, в которой надо объяснить физическое явление, демонстрируемое в аудитории. Здесь важно понять сущность явления и среди различных факторов выделить главный.

Работа оценивалась в зависимости от суммы набранных баллов (за сумму от четырех до двенадцати баллов ставилась оценка «три», от тринадцати до двадцати одного — «четыре»). Ниже после текста каждой задачи указан балл за ее полное решение и процент решивших ее (при этом задача считалась решенной, если за нее было поставлено не менее половины полного количества баллов).

Вариант 1

1. Схема состоит из конденсатора емкости C , диодов D_1 и D_2 и катушек с индуктивностью L_1 и L_2 , собранных, как показано на рисунке 1. Найдите период колебаний напряжения на конденсаторе в этой схеме. (4 б.; 64%)

2. Закрытый с торцов теплоизолированный цилиндр массы m перегороден подвижным поршнем массы M . С обеих сторон от поршня находится по одному молю идеального газа, внутренняя энергия которого $U = cT$. Коротким ударом цилиндру сообщают скорость \vec{v} , направленную вдоль его оси. На сколько изменится температура газа после затухания колебаний поршня? Трения между поршнем и цилиндром нет. (7 б.; 40%)

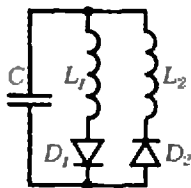


Рис. 1.

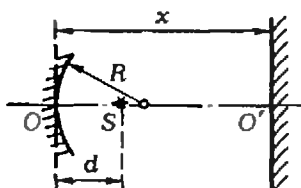


Рис. 2.

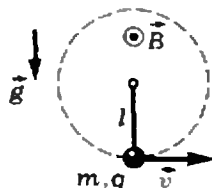


Рис. 3.

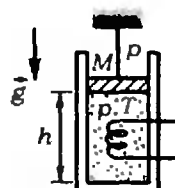


Рис. 4.

3. Цилиндрический стакан до высоты h заполнен кусочками льда. Поры между кусочками льда сквозные, и в исходном состоянии заполнены воздухом. Льдинки занимают долю объема $\alpha=60\%$. Лед начинает таять, причем соотношение объемов льдинок и пор между ними остается неизменным. Найдите уровень воды в стакане в момент, когда растаяла доля льда $\beta=70\%$. Плотность сплошного льда $\rho_{\text{л}}=900 \text{ кг/м}^3$, плотность воды $\rho_{\text{в}}=1000 \text{ кг/м}^3$. (9 б.; 41%)

4. Оцените мощность, выделяющуюся в виде тепла при экстренном торможении грузовика. (4 б.; 67%)

5. Спираль лампочки накаливания проецируется на экран с помощью объектива. Затем часть объектива по диаметру перекрывают широкой полоской из непрозрачного материала, оставляя неперекрытыми симметричные сегменты линзы. При смещении лампочки из плоскости оптимальной фокусировки наблюдаются раздвоенные размытые изображения нити. Если полоску убрать, эти изображения исчезают. Объясните наблюдаемое явление. (5 б.; 52%)

Вариант 2

1. На главной оптической оси OO' небольшого вогнутого зеркала с радиусом кривизны R помещен точечный источник света S на расстоянии $d=3/4R$ от зеркала (рис. 2). На каком расстоянии x от вогнутого зеркала надо поставить плоское зеркало, перпендикулярное главной оптической оси OO' , чтобы лучи от источника, отраженные сначала одним, а потом другим зеркалом, снова сфокусировались в точку S ? (5 б.; 59%)

2. Небольшое тело с массой m и положительным зарядом q , прикрепленное к гибкой нити длины l , может двигаться по окружности в вертикальной плоскости. Однородное магнитное поле с индукцией B перпендикулярно этой плоскости (рис. 3). При какой минимальной скорости тела в нижней точке оно совершит полный оборот? Ускорение силы тяжести g . (7 б.; 32%)

3. Высота вертикального водяного фонтана от уровня выходной трубы насоса равна H . Во сколько раз следует изменить мощность насоса, чтобы полная высота фонтана осталась прежней после подсоединения к выходной трубе насоса вертикальной трубы такого же диаметра с высотой $h < H$? Потерями энергии на трение можно пренебречь. (9 б.; 29%)

4. Оцените силу, необходимую для отрыва по всему периметру контакта хорошо поставленной медицинской банки. (5 б.; 57%)

5. Грузик на бечевке подвешен к подставке, которая может скользить по столу. Грузик

раскачивают, держа его за нитку все время в одну сторону. В одном случае маятник колеблется свободно, в другом движение бечевки ограничивается перекладной. Объясните, почему при этом изменяется направление движения подставки с грузиком (в первом случае — к держащему нить, во втором случае — от него) (5 б.; 21%)

Вариант 3

1. В реку, скорость течения которой везде равна u , из точки O на берегу бросают камень перпендикулярно берегу. Скорость поверхностных волн в воде равна v . Через какое время после падения камня волна придет в точку O , если камень упал на расстоянии L от берега? (3 б.; 78%)

2. На каком расстоянии x от прозрачного шара с радиусом R и показателем преломления n следует поместить точечный источник света S , чтобы его изображение S' оказалось с другой стороны на таком же расстоянии x от шара? Изображение создается узким пучком лучей, близких к оси, для которых $\lg \alpha \approx \sin \alpha \approx \alpha$. (7 б.; 32%)

3. В теплоизолированном высоком цилиндрическом сосуде на расстоянии h от дна висит на нити поршень массы M (рис. 4). Под поршнем находится 1 моль идеального газа. Давление под поршнем в начальный момент равно внешнему давлению p , температура газа T . Какое количество теплоты нужно подвести к газу, чтобы поршень поднялся до высоты $2h$ от дна? Трение отсутствует. Внутренняя энергия моля газа $U=cT$, газовая постоянная R . Ускорение силы тяжести g . (9 б.; 65%)

4. Оцените глубину ямы на поверхности воды под вертолетом, зависшим на небольшой высоте над озером. (5 б.; 65%)

5. Катушка из медного провода с разомкнутыми концами, подвешенная в зазоре между полюсами сильного постоянного магнита, свободно колеблется. Если концы провода замкнуть, колебания резко затормаживаются в зазоре и быстро прекращаются. Объясните наблюдаемое явление. (5 б.; 54%)

Московский энергетический институт

Математика
Письменный экзамен
Вариант 1

1. Упростив выражение для $f(x)$, найдите $f'(x)$, если

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x+1}} - \frac{2\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x+1}}$$

$$-\frac{(\sqrt[3]{x}-1)(2\sqrt[3]{x}-1)}{6\sqrt[3]{x^2}+9\sqrt[3]{x}+3} + (0,2)^{\log_{\sqrt{5}}\sqrt{x}}$$

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (2^x - 2^{2y})(4^x - 2^{4y}) = 45 \\ 2^x + 4^y = 5. \end{cases}$$

3. Среди равнобедренных трапеций с острым углом 45° и суммой длин высоты и большего основания, равной a , найдите трапецию наибольшей площади.

4. Найдите все корни уравнения

$$2\cos^2 2x - 2\sin\left(\frac{3}{2}\pi + x\right) \cdot \sin\left(\frac{5}{2}\pi + x\right) = 1, \text{ удовлетворяющие неравенству } \sqrt{2x^2 + 3x} - 9x^2 > 0.$$

5. В основании четырехугольной пирамиды лежит равнобедренная трапеция, у которой боковая сторона a равна меньшей стороне основания, а острый угол равен α . Найдите объем пирамиды, если высота ее равна диагонали основания.

Вариант 2

1. Упростите выражение

$$\left[\frac{\sqrt[3]{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \cdot \sqrt[6]{5+2\sqrt{6}+\sqrt{x^2+\sqrt{x}}}}{\sqrt{\sqrt{3}+2} \cdot \sqrt[4]{7-4\sqrt{3}-x}} \right]^{-1} \cdot (1+\sqrt[3]{x}) \cdot (0,1)^{\log_2 x}$$

2. Найдите область определения функции

$$f(x) = \left(-1 - \log_5(\sqrt{x}-1) \right) \times \left[\frac{1}{2} \log_5 x - \log_5(x-\sqrt{x}) \right]^{\frac{1}{2}}$$

3. Число -10 представьте в виде суммы двух слагаемых так, чтобы сумма их кубов была наибольшей.

4. Найдите все корни уравнения

$$1 - 2\sqrt{2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - \sin 2x - \cos 2x = 0,$$

лежащие на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{4}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

5. Основание $[AD]$ трапеции $ABCD$ вдвое длиннее основания $[BC]$ и вдвое длиннее боковой стороны $[AB]$. Найдите скалярное произведение $\vec{AB} \cdot \vec{DC}$, если $\vec{BAC} = \alpha$ и площадь треугольника ABC равна S .

Задачи устного экзамена

1. Какое число больше: $(0,9)^{-1,2}$ или $(1,2)^{-0,9}$?

2. Сколько цифр содержит число 2^{100} (считайте, что $\lg 2 = 0,301$)?

3. Найдите период функции $y = 5\sin(\pi x - 1)$.

4. Постройте график функции

$$y = \sin^2 \sqrt{lg x} + \cos^2 \sqrt{lg x}.$$

5. Решите неравенство

$$\sqrt{2-x} > x.$$

6. Найдите производную функции $y = 2^{\cos \frac{1}{x}}$.

7. Найдите сумму $\sum_{n=1}^{100} \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right]$.

8. С помощью одной линейки из точки, лежащей вне окружности, опустите перпендикуляр на ее диаметр.

9. В равнобедренной трапеции $ABCD$ ($(BC) \parallel (AD)$, $|AB| = |CD|$) острый угол равен $\frac{\pi}{3}$. Выразите вектор \vec{BC} через $\vec{AB} = \vec{a}$ и $\vec{AD} = \vec{b}$.

10. В трапеции длина нижнего основания равна a , длина верхнего основания равна b . Найдите длину отрезка, проведенного через точку пересечения диагоналей параллельно основаниям.

Физика

В зависимости от выбранного факультета абитуриенты сдавали экзамен по физике либо письменно, либо устно.

Вариант письменного экзамена

1. Понятие о потенциале. Разность потенциалов. Связь разности потенциалов с напряженностью для однородного электрического поля.

2. Почему при выпуске газа из баллона вентиль покрывается росой или даже инеем?

3. Тело массой $m = 2$ кг двигалось по окружности, причем в некоторой точке A оно имело скорость $v_A = 4$ м/с, а, пройдя четверть окружности, в точке B — $v_B = 3$ м/с. Определите модуль ΔP вектора изменения импульса тела.

4. При облучении поверхности катода фотоэлемента монохроматическим светом частоты ν максимальная скорость вылетающих фотоэлектронов равна v_0 . Определите красную границу фотоэффекта λ_m для материала катода.

5. К источнику постоянного тока параллельно подключены конденсатор емкостью $C = 20$ мкФ и катушка с индуктивностью $L = 0,02$ Гн. При этом напряжение на конденсаторе $U_1 = 100$ В, а ток через катушку $I_1 = 2$ А. Затем источник отключают. Какой заряд Q будет на конденсаторе в момент, когда ток в катушке равен $I_2 = 1$ А? Потерями энергии на нагревание пренебречь.

Задачи устного экзамена

1. Шарик массой $m = 20$ г падает на стальную плиту со скоростью $v_1 = 5$ м/с и отскакивает от нее в прямо противоположном направлении со скоростью $v_2 = 4$ м/с. Определите изменение импульса ΔP шарика и модуль F средней силы, действующей на шарик во время удара, если соударение длилось $\tau = 10^{-2}$ с.

2. Какое количество теплоты Q выделится в проводнике при разряде через него плоского конденсатора, заряженного до разности потенциалов $\Delta \varphi = 2$ кВ? Площадь пластин конденсатора $S = 0,2$ м², расстояние между пластинами $d = 2 \cdot 10^{-3}$ м, диэлектрическая проницаемость диэлектрика, находящегося между пластинами конденсатора, $\epsilon = 10$, электрическая постоянная $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

3. Проволочное кольцо радиуса $r = 0,3$ м и сопротивлением $R = 2$ Ом расположено в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0,1$ Тл. Вектор магнитной индукции \vec{B} перпендикулярен плоскости кольца. Определите величину заряда Q , который протечет по кольцу, если оно повернется вокруг одного из своих диаметров на угол $\varphi = \pi$.

Ленинградский государственный педагогический институт им. А. И. Герцена

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

(математический факультет)

1. Упростите при $x > 1$ выражение

$$\frac{\sqrt{\sqrt{2}-1} \cdot \sqrt[4]{3+2\sqrt{2}} + \sqrt[3]{(x+12)\sqrt{x-6x-8}}}{\frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{1-2x+x^2}} - \sqrt{\sqrt{2}+1} \cdot \sqrt[4]{3-2\sqrt{2}}}$$

2. Решите неравенство

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{\left|\frac{x-1}{x+2}\right|} > \frac{4}{9}.$$

3. Найдите промежутки монотонности функции $y = \frac{3}{2} \ln^2 x - \ln^3 x$.

4. На основаниях AB и CD вне трапеции построены квадраты. Докажите, что прямая, соединяющая их центры, проходит через точку пересечения диагоналей трапеции.

5. Шар радиуса R вписан в пирамиду, в основании которой лежит ромб с острым углом α . Боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углом φ . Найдите объем пирамиды.

Вариант 2

(физический факультет)

1. Упростите выражение

$$\left[\frac{xy^{\frac{3}{2}} - yx^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}}} : \frac{(xy)^{\frac{3}{2}}}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 - 3(xy)^{\frac{1}{2}}} \right] \times \left(\frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{xy^{\frac{1}{2}} + yx^{\frac{1}{2}}} \right)^{-1}$$

2. Решите уравнение

$$(0,4)^{\lg^2 x + 1} = (6,25)^{2 - \lg x^2}.$$

3. Решите уравнение

$$2 \cos 2x + \cos^2 \frac{x}{2} - 10 \cos \left(\frac{5\pi}{2} - x \right) + \frac{7}{2} = \frac{1}{2} \cos x.$$

4. Найдите точки максимума и минимума функции $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}$.

5. В правильной четырехугольной пирамиде плоский угол при вершине равен 60° . Докажите, что один из двугранных углов этой пирамиды вдвое меньше другого.

Задачи устного экзамена

1. Зная, что $\lg 64 = k$, найдите $\lg \sqrt[3]{25}$.

2. Определите знак числа $\sin \left(2 \arctg \frac{1}{3} + \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$.

3. Решите уравнение

a) $\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3} \right)^{\log_{\frac{x-2}{x-3}} 3} = \frac{\log_3 3}{x-2}$;

b) $\log_2 \log_3 x + 1 = \log_2 \log_3 (4x-3)$;

в) $1 - 3 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha = \frac{7}{16}$.

4. Решите неравенство

a) $(0,3)^{\log_2(\log_2(x^2-19)) - 2} > 1$;

b) $\left| \frac{2-3|x|}{1+|x|} \right| < 1$;

в) $4 \log_{0,1}(x-3) + \log_2 5 > 50$.

5. Найдите область определения функции

a) $\frac{\arccos(4-x)}{\sqrt{x^2-x-12}}$;

b) $\log_7 \cdot 2x(x^2+11x-26)$;

в) $(\sin x + \cos x)^2 - \frac{1 - \cos 4x}{2 \sin 2x} - \cos x$;

6. Найдите множество значений функции

a) $(\sin x + \cos x)^2 - \frac{1 - \cos 4x}{2 \sin 2x} - \cos x$;

b) $1 - 6 \cos^2 x + 6 \sin^2 x$.

7. Постройте график функции

a) $\frac{2x(2x+3)}{\sqrt{4x^2+12x+9}} - 4$;

b) $\cos^2 x \cdot \frac{1}{2} - \frac{\sin^2 x}{2}$.

8. В ромб вписан круг. Каждая сторона ромба точкой касания делится на отрезки, длины которых a и b . Найдите площадь круга.

9. Через точку внутри треугольника проведены прямые параллельно сторонам. Площади треугольников, образовавшихся при этом, равны S_1 , S_2 и S_3 . Найдите площадь данного треугольника.

10. Дано круговое кольцо, площадь которого Q . Определите длину хорды большего круга, касательной к меньшему.

11. Из точки O , не принадлежащей прямой b , проведены к b перпендикуляр (OB) и наклонная (OM) ($M \in b$, $B \in b$). Докажите, что $\overline{OB} \cdot \overline{OM}$ не зависит от положения точки M на прямой b .

12. Определите площадь полной поверхности конуса, если угол между образующей и плоскостью основания равен α , а площадь осевого сечения равна Q .

13. Высота правильной четырехугольной пирамиды 6 см, плоский угол при вершине пирамиды 60° . Найдите объем пирамиды.

Физика

Задачи устного экзамена

Физический факультет

1. Тело за время $t=6$ с переместилось на $s=270$ см. Первые три секунды тело двигалось равнопеременно, а последние три се-

кунды — равномерно. Определите начальную скорость тела, если его перемещение за пятую секунду равно $s' = 40$ см.

2. К аккумулятору с внутренним сопротивлением $r = 2$ Ом подключили проволоку сопротивлением $R = 2$ Ом, а затем — параллельно еще такую же проволоку. Во сколько раз изменится количество теплоты, выделенное первой проволокой после подключения второй?

3. Определите оптическую силу тонкой рассеивающей линзы, если известно, что узкий предмет, помещенный перед ней на расстоянии $d = 40$ см, дает изображение в 4 раза уменьшенное. Изменится ли величина изображения, если вплотную за линзой на пути лучей установить плоское зеркало?

Математический факультет

1. Автомобиль и велосипедист равномерно движутся навстречу друг другу со скоростями. Соответственно, $v_1 = 10$ м/с и $v_2 = 5$ м/с. Расстояние между ними в начальный момент времени было $l = 300$ м. Графически и аналитически определите место и время их встречи. Изменится ли время и место встречи, если их скорость будет в два раза большей?

2. Постройте график зависимости плотности водорода от температуры при изобарном нагревании. Газ находится под давлением $p = 760$ мм рт. ст.

3. Постройте график зависимости напряжения на клеммах источника тока от внешнего сопротивления, если ЭДС источника $\mathcal{E} = 4$ В, а его внутреннее сопротивление $r = 2$ Ом.

4. Индуктивность колебательного контура равна 40 мГн. Постройте график зависимости частоты колебаний тока от емкости для данного контура.

Индустриально-педагогический факультет

1. Третью часть тело двигалось со скоростью $v = 36$ км/ч. Остальной путь $l = 300$ м тело прошло за $t = 60$ с. Определите среднюю скорость движения тела.

2. Три пятилитровых сосуда заполнены водой с температурой, соответственно, 20, 80 и 100°C. Имеется также пустой десятилитровый сосуд. Как, используя имеющуюся воду, получить 10 л воды с температурой 70°C? Теплоемкостью сосудов и потерями тепла при переливании пренебречь.

3. Имеются тонкие собирающая и рассеивающая линзы с известными фокусными расстояниями и точечный источник света. Предложите один из вариантов расположения источника и линз для получения параллельного пучка света. Постройте соответствующий ход лучей

Ответы, указания, решения



Уравнение газового состояния

1. Переход от роста давления к его падению происходит в тех точках графика (см. рис. 3 в статье), где изобара является касательной к графику.

2. Давление увеличилось в $4/3$ раза.

3. $p = 7mg/S = 3,5 \cdot 10^5$ Па.

4. $z = \rho v S N_A / (RT) \approx 6 \cdot 10^{29}$ с⁻¹, где $N_A = 6 \times 10^{23}$ моль⁻¹ — число Авогадро, $R = 8,31$ Дж/(моль · К) — универсальная газовая постоянная.

Указание. Поскольку средняя скорость теплового движения молекул гораздо меньше скорости спутника, молекулы можно считать неподвижными.

Многофигурная стереометрическая задача

1. 6 см.

2. $\arctg(2\sqrt{2} - \sqrt{3})$.

3. $|AA_1| = 20$ см.

4. $\frac{1}{4}(S + \sqrt{2} \sigma k \sqrt{1-l})$.

Новосибирский государственный университет им. Ленинского комсомола

Математика

Вариант 1

1. $\{7, \frac{1}{2}\}$.

2. $x_1 = \arctg 3 + \pi k$, $x_2 = \arctg \frac{1}{2} + \pi l$ ($k, l \in \mathbb{Z}$);

$\arctg 3$, $\arctg 3 + \pi$, $\arctg \frac{1}{2} + \pi$.

3. $\frac{3\sqrt{3}}{2} R^2$. Указание. Если V — центр окружности, вписанной в $\triangle CBD$, то $\widehat{BAV} = \widehat{BDV}$. Отсюда следует, что $\triangle ABD$ — правильный.

4. $]-\infty; -4[\cup \{5\}$.

5. $\frac{\sqrt{6}}{8}$. Указание. Докажите, что если из

произвольной точки $H \in (AC)$ провести в плоскостях ABC и ACD перпендикуляры к (AC) , то H тогда и только тогда будет точкой пересечения с (AC) плоскости, проходящей через центр O искомой сферы перпендикулярно (AC) , когда $|HR| = |HQ|$ (R и Q — точки пересечения проведенных перпендикуляров с прямыми PN и AM соответственно). Выведите отсюда, что такая точка H и, следовательно, искомая сфера единственны (при доказательстве используется условие $|AP| = 3|BP|$), причем $R = N$, $Q = M$. Искомый радиус легко находится из четырехугольника $OMHN$.

Вариант 2

1. $\{1; 5\}$, $\{0; 2\}$.

2. $]-\infty; -\sqrt{6}[\cup \{0\} \cup]\sqrt{6}; +\infty[$.

3. 1.

4. $x_1 = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{6} k, x_2 = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{4} l (k, l \in \mathbb{Z})$.

5. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Указание. Пусть O — основание высоты пирамиды; тогда $O \in [AB]$ и $|AO| = |OB|$. В системе координат с началом O и осями OB, OC, OS найдите координаты точек A, B, M, N ; затем найдите уравнение плоскости $\alpha = (BMN)$ как плоскости, проходящей через три известные точки; наконец, примените формулу из § 62 «Геометрии 9—10». Задачу можно решить и чисто геометрически: пусть $K = \alpha \cap (AC)$, L — основание перпендикуляра, опущенного из A на α ; докажите, что $(KB) \perp (SAB)$; выведите отсюда, что $L \in (BM)$.

Физика

Вариант 1

1. См. решение задачи Ф800, которое будет опубликовано позже.
 2. См. решение задачи Ф802, которое будет опубликовано позже.
 3. После того как часть льда растаяла, толщина слоя оставшегося пористого льда равна $(1-\beta)h$. Слой воды, проникшей в поры льда, имеет толщину $h_1 = (1-\beta)h \rho_{\text{л}} / \rho_{\text{в}}$ (рис. 1) и массу $m_1 = (1-\alpha) \rho_{\text{л}} S h_1 = (1-\alpha)(1-\beta) \rho_{\text{л}} S h$. Масса всей воды, образовавшейся в результате таяния, равна $m'_1 = \alpha \rho_{\text{л}} S h$. Если $m'_1 - m_1 > 0$ (что реализуется по условиям задачи, поскольку $\alpha + \beta = 1,3 > 1$), то лед всплывает. Высота уровня воды под слоем льда равна $h_2 = (m'_1 - m_1) / (\rho_{\text{в}} S) = (\alpha + \beta - 1) h \rho_{\text{л}} / \rho_{\text{в}}$, а искомая полная высота уровня воды в стакане равна

$$H = h_1 + h_2 = \alpha h \rho_{\text{л}} / \rho_{\text{в}} = 0,54h.$$

Этот результат можно получить проще. Действительно, если лед плавает, то от его таяния уровень воды в стакане не меняется: лед, плавая, вытесняет столько воды, какова масса его самого. Значит, при таянии образуется столько воды, сколько вытеснилось. Поэтому растопим мысленно весь лед и найдем искомую высоту уровня воды из равенства $\alpha h \rho_{\text{л}} S = H \rho_{\text{в}} S$.

4. Грузовик массы m , имея в начале торможения скорость v , обладает кинетической энергией $mv^2/2$. Вся эта энергия переходит в тепло за время торможения $t \sim 2l/v$, где l — длина пути торможения. Таким образом, средняя мощность $P \sim mv^2/2 : 2l/v \sim mv^3/(4l)$. При значениях $v \sim 60$ км/ч ~ 16 м/с, $m \sim 10^4$ кг и $l \sim 10$ м получаем $P \sim 10^6$ Вт, то есть порядка мегаватта.

5. Как видно на рисунка 2, полоска разбивает световой поток на два, формирующих

два размытых изображения каждой точки предмета (штриховой линией указано положение экрана, при котором эти изображения сливаются в одно резкое). Правильное объяснение эффекта получается и в том случае, если незакрытые части объектива рассматривать как две разнесенные линзы.

Вариант 2

1. $x = \frac{d^2}{2d-R} = \frac{9}{8} R \left(\frac{R}{2} < d < R \right)$.

2. $v_{\min} = \left(5gl + \frac{q^2 B^2 l^2}{2m^2} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{4m^2 g}{q^2 B^2 l}} \right) \right)^{1/2}$.

3. Масса воды, поступающая из насоса в единицу времени при скорости v через сечение S , равна $\rho v S$. Мощность насоса без трубки равна

$$N_0 = \rho v S \cdot \frac{v^2}{2}$$

При наличии трубки высоты h вода, кроме кинетической энергии, обладает еще и потенциальной энергией, связанной с подъемом жидкости на высоту h , поэтому мощность

$$N = \rho v S \cdot \frac{u^2}{2} + \rho v S \cdot gh,$$

где u — скорость воды. Из кинематики имеем

$$v^2 = 2gH, u^2 = 2g(H-h).$$

Тогда окончательно получаем

$$\frac{N}{N_0} = \frac{u}{v} \left(\left(\frac{u}{v} \right)^2 + \frac{2gh}{v^2} \right) = \frac{u}{v} \sqrt{1 - \frac{h}{H}}.$$

Можно решить задачу проще, заметив, что сила напора насоса в обоих случаях одна и та же (так как одинаковы высоты фонтанов). Тогда, используя формулы $N = Fu$ и $N_0 = Fv$, получаем $N/N_0 = u/v = \sqrt{1 - h/H}$.

4. После остывания воздуха от температуры T до температуры среды T_0 давление в банке падает от p_0 до p , создавая силу присасывания $F \sim (p_0 - p)S$. Масса и объем воздуха внутри не изменяются, так что $p_0/T = p/T_0$. Отсюда

$$F \sim p_0 \frac{T - T_0}{T} S \sim p_0 \frac{\Delta T}{T} S.$$

Выбирая $\Delta T \sim 100$ К, $T \sim 400$ К, $S \sim 10$ см² $\sim 10^{-3}$ м² и $p_0 \sim 10^5$ Па, получаем

$$F \sim p_0 \frac{\Delta T}{T} S \sim 25 \text{ Н}.$$

5. В первом случае, без перекладины (рис. 3, а), силу трения преодолевают, натягивая нить по горизонтали на себя. При отпускании нити горизонтальная сила трения пока держит подставку. Во втором случае, как и в первом, подставка неподвижна до взаимодействия с перекладиной II (рис. 3, б).

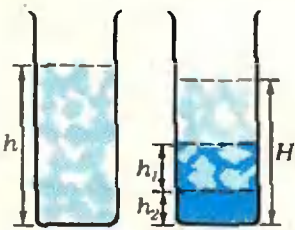


Рис. 1.

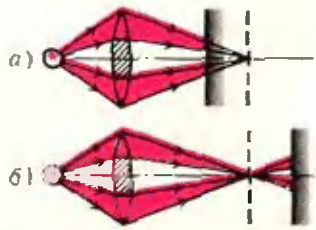


Рис. 2.

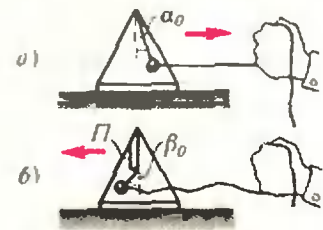


Рис. 3.

А после этого взаимодействия импульс шарика за укороченное (из-за уменьшения длины маятника) время передается подставке, и сила трения преодолевается большей горизонтальной силой. Можно подойти к объяснению и иначе. Горизонтальная проекция силы натяжения нити легко выражается через углы отклонения нити от вертикали: $T_x = mg \sin \alpha \times \times (3 \cos \alpha - \cos \alpha_0)$. Чем больше максимальный угол отклонения α_0 , тем больше горизонтальная сила. После взаимодействия нити с перекладиной максимальный угол отклонения β_0 увеличивается, увеличивается и горизонтальная сила, преодолевающая силу трения покоя. Это и приводит к смещению подставки в направлении от руки к перекладине.

Вариант 3

1. См. решение задачи Ф798, которое будет опубликовано позже.

2. $x = R/(n-1)$.

3. Запишем уравнение состояния газа до и после подвода тепла:

$$p_h S = RT \text{ и } (p + Mg/S) 2hS = RT'$$

и закон сохранения энергии:

$$Q = \Delta U + A = c(T' - T) + (Mg + pS)h.$$

Отсюда получаем

$$Q = (c + R)T + Mgh(1 + 2c/R).$$

4. Из условия равновесия вертолета следует, что он выталкивает столько воды, какова его масса (воздух при этом играет роль передающего посредника и из рассмотрения может быть исключен). Выбрав массу вертолета $m \sim 10^4$ кг и длину лопастей $l \sim 5$ м, получаем глубину ямы $h \sim \frac{m}{\rho_{\text{вод}} \pi l^2} \sim 0,1$ м.

5. При разомкнутых концах проводов взаимодействие катушки с магнитным полем практически отсутствует, и колебания почти не затухают. Если концы замкнуть, в витках катушки, при ее попадании в магнитное поле, наводится индукционный ток. По правилу Ленца ток имеет такое направление, чтобы воспрепятствовать изменению магнитного потока через катушку. В результате на переднюю часть витка, вошедшего в сильное магнитное поле, действует сила, направленная против движения. На другую часть витка, находящегося в периферийной области поля, где оно значительно слабее, действует сила противоположного направления. Но поскольку первая сила по модулю существенно больше второй, результирующая сила тормозит движение. При выходе катушки из поля возникает результирующая сила, препятствующая этому выходу. Индукционные токи приводят к тепловым потерям энергии в проводе катушки, в результате колебания быстро затухают.

Московский энергетический институт

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. При $x > 0$ $f'(x) = -\frac{2}{3\sqrt{x^3}}$.

2. $\{(2; 0), (0; 1)\}$.

3. Большее основание $\frac{3}{4} a$.

4. $-\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi$.

5. $\frac{4}{3} a^3 \sin \alpha \cdot \cos^3 \frac{\alpha}{2}$.

Вариант 2

1. 1. Замечание. Область определения упрощенного выражения $]0; 1[\cup]1; +\infty[$.

2. $]1; 1\frac{11}{25}[\cup]36; +\infty[$.

3. $-10 = (-5) + (-5)$.

4. $-\frac{3}{4}\pi, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi, \frac{3}{2}\pi$.

5. $-45 \cdot (\lg a)$. Указание. $\vec{AD} \cdot \vec{DC} = -\vec{AD} \cdot (\vec{AC} - \vec{AD})$.

Задачи устного экзамена

1. $(0,9)^{-1,2}$. 2. 3!. 3. 2. 4. См. рис. 4. 5. $] -\infty; 1[$.



Рис. 4.

6. $\ln 2 \cdot \frac{1}{x^2} \cdot \sin \frac{1}{x} \cdot 2^{\cos \frac{1}{x}}$. 7. $\frac{100}{10!}$. Указание.

$\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. 8. Решение. Данную точку A соедините с концами C и D данного диаметра. Точку C соедините с точкой F пересечения (AD) с данной окружностью, а точку D соедините с точкой E пересечения (AC) с данной окружностью. Прямая, проходящая через A и $(CF) \cap (DE)$, — искомая. 9. $\frac{|\vec{b}| - |\vec{a}|}{|\vec{b}|}$. Указание. $|BC| =$

$$= |\vec{b}| - |\vec{a}|. 10. \frac{2ab}{a+b}$$

Решение. Из подобия треугольников AEO и ABC (обозначения см. на рис. 5) $\frac{|AE|}{|AB|} = \frac{|EO|}{b}$, из подобия

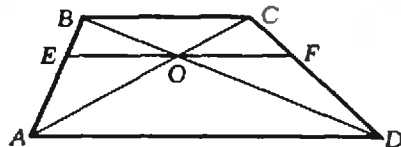


Рис. 5.

треугольников BEO и BAD $\frac{|BE|}{|AB|} = \frac{|EO|}{a}$;

отсюда $\frac{|EO|}{a} + \frac{|EO|}{b} = 1, |EO| = \frac{ab}{a+b}$. Аналогично находим $|OF|$.

Физика

Вариант письменного экзамена

2. При быстром истечении газа из баллона теплообменом с окружающей средой можно

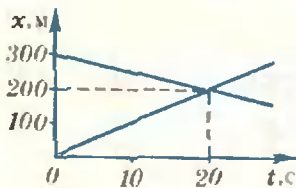


Рис. 6.

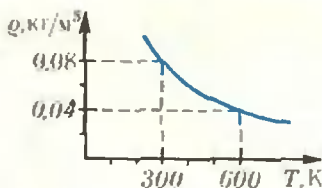


Рис. 7.

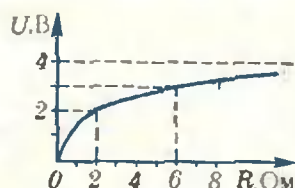


Рис. 8.

пренебречь. Газ, расширяясь, совершает положительную работу, поэтому, согласно первому закону термодинамики, его внутренняя энергия уменьшается, и газ охлаждается, что приводит к охлаждению вентиля. Когда температура вентиля станет равной точке росы, начнется конденсация водяных паров, содержащихся в воздухе, то есть выпадает роса. При дальнейшем уменьшении температуры возможно и образование инея.

3. $\Delta P = m\sqrt{v_A^2 + v_B^2} = 10 \text{ кг} \cdot \text{м/с}$.

4. $\lambda_m = \frac{hc}{h\nu - mv_0^2/2}$, где h — постоянная Планка, c — скорость света, m — масса электрона.

5. $Q = C\sqrt{U_1^2 + L(I_1^2 - I_2^2)}/C \approx 2,3 \cdot 10^{-3} \text{ Кл}$.

Задачи устного экзамена

- $\Delta \vec{P} = \vec{P}_2 - \vec{P}_1$; $\Delta P = m(v_1 + v_2) = 0,18 \text{ кг} \cdot \text{м/с}$; $F = mg + \Delta P/\tau = 18,2 \text{ Н}$.
- $Q = \epsilon_0 \epsilon S U^2 / (2d) \approx 1,8 \cdot 10^{-2} \text{ Дж}$.
- $Q = 2\pi B r^2 / R \approx 2,8 \cdot 10^{-2} \text{ Кл}$.

Ленинградский государственный педагогический институт им. А. И. Герцена

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

- 1 — x.
- $]-\infty; -5] \cup]-1; +\infty[$.
- $]0; 1]$ и $]e; +\infty[$ — промежутки убывания, $]1; e]$ — промежуток возрастания.
- Указание. Соедините точку O пересечения диагоналей трапеции с центрами O_1, O_2 квадратов и докажите, что треугольники OBO_1 (O_1 — центр квадрата, построенного на AB) и ODO_2 подобны.

5. $\frac{4}{3} R^3 \frac{\text{ctg}^3 \frac{\varphi}{2} \cdot \text{lg} \varphi}{\sin \alpha}$. Указание. Вершина S данной пирамиды проектируется в точку O пересечения диагоналей основания $ABCD$. Центр K вписанного шара лежит на $[SO]$. Пусть F — основание перпендикуляра, опущенного из O на (CD) ; тогда $[FK]$ — биссектриса $\angle SFO$.

Вариант 2

1. —1.
- $\{10, 10^5\}$.
- $x = (-1)^{\frac{\pi}{6}} + \pm k (k \in Z)$.
- $x = -1$ — точка максимума, $x = 1$ — точка минимума.

Задачи устного экзамена

- $\frac{6-k}{9}$.
- +
- а) $\{6\}$; б) $\{3\}$; в) $x =$

- $-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} k (k \in Z)$
- а) $]-10; -2\sqrt{5}[\cup]2\sqrt{5}; 10[$; б) $]-\frac{3}{2}; -\frac{1}{4}[\cup]\frac{1}{4}; \frac{3}{2}[$; в) $]11; +\infty[$.
- а) $[4; 5]$; б) $]-\infty; -13[\cup]2; 3[\cup]3; \frac{1}{2}[$; в) $x \neq \frac{\pi}{2} k (k \in Z)$.
- а) $]0; 1[\cup]1; 2[$; б) $]-5; 7]$.
- пав.
- $(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3})^2$.
- $2\sqrt{\frac{Q}{\pi}}$.
- $\pi Q \cdot \text{ctg} \frac{\alpha}{2}$.
- 144 см^3 .

Физика

Физический факультет

- $v_0 = (4s - 18s')/t = 0,6 \text{ м/с}$.
- Количество теплоты уменьшится в $(2r + R)^2 / (r + R)^2 = 2,25$ раза.
- $D = -3/d = -7,5$ дптр; изображение уменьшится.

Математический факультет

- $t = l / (v_1 + v_2) = 20 \text{ с}$ (см. также рис. 6); $x = v_1 t = 200 \text{ м}$; во втором случае время до встречи уменьшится в два раза, а место встречи не изменится.
- См. рис. 7.
- См. рис. 8.
- См. рис. 9.

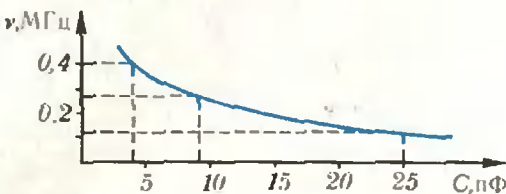


Рис. 9.

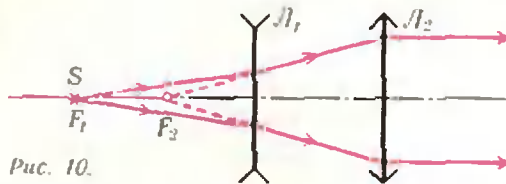


Рис. 10.

Индустриально-педагогический факультет

- $v_{\text{ср}} = \frac{3l}{2l + l/v} = 6 \text{ м/с}$.
- Сначала в пустой сосуд выливают воду из первого и третьего сосудов. Затем половину

этой воды переливают в один из освобожденных сосудов, а ее место занимают водой из второго сосуда.

3. Источник света надо поместить в фокусе рассеивающей линзы, а собирающую линзу надо расположить так, чтобы ее фокус находился посередине между источником и рассеивающей линзой (рис. 10).

Шахматная страничка

(см. «Квант», 1982, № 11)

Задание 21 (К. Фабель, 1948 г.). У белых ладья b1 нечет, ладья g1 тоже нечет, король чет. Кони на полях разного цвета — чет. Пешки, слоны и ферзь не двигались — чет. Итого: у белых чет. Легко проверить, что у черных нечет. Значит, ход их, и матуют они — К:c2×.

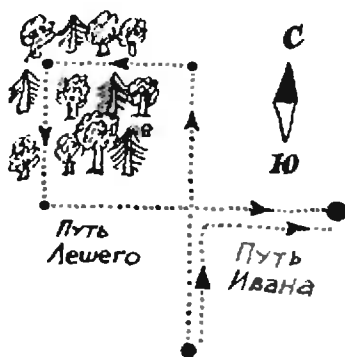
Задание 22. Произведя подсчет, легко убедиться, что черные сделали четное число ходов, а белые нечетное, то есть на ход больше. Можно подумать, что сейчас ход черных, но они не в состоянии взять ни одну фигуру противника.

Значит, за свою фигуру держатся белые, которые уже сделали ход, но еще не успели отпустить руку. Какой же это ход? Король, ферзь, ладья, слоны и пешки не могли пойти, а ход Kf6—g8 не мог быть последним. Следовательно, ход был сделан белым конем, только что поставленным на b8. Итак, белые сыграли Kc6—b8, и еще не успели отпустить руку от этого коня!

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 1)

1. Поскольку Леший шел по лесу со скоростью вдвое меньшей, чем по дороге, то он за двое суток (вторые и третьи) прошел столько же, сколько за первые, то есть треть



пути, следовательно, 100 верст, пройденные за последние сутки, также составили треть пути. Итак, Леший прошел 300 верст. Его маршрут изображен на рисунке. Иван-царевич рассуждал так: если пройти полпути на север и повернуть на восток, то еще через полсутки он окажется в Кашеевом царстве, пройдя половину пути на север и половину пути на восток, то есть 100 верст.

2. Задумано число 163.

3. 271

×205

1355

542

55555

4. На одной и той же высоте механическая энергия у падающего шарика будет меньше, чем у поднимающегося, так как часть ее уйдет на преодоление трения о воздух. В то же время потенциальная энергия у них будет одинакова. Значит, кинетическая энергия у падающего шарика меньше, откуда меньше и его скорость на этой высоте. Таким образом, шарик будет падать дольше, чем подниматься.

Главный редактор — академик И. К. Кикоин

Первый заместитель главного редактора — академик А. Н. Колмогоров

Заместители главного редактора: М. Н. Данилычева, В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев
Редакционная коллегия: Л. Г. Асламазов, М. И. Башмаков, В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский, А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов, Н. Б. Васильев, С. М. Ворони, Б. В. Гиеденко, В. Л. Гутенмахер, Н. П. Долбилин, В. Н. Дубровский, А. Н. Земляков, А. Р. Зильберман, С. М. Козел, С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев, А. А. Михайлов, Е. М. Никшиц, С. П. Новиков, М. К. Потапов, В. Г. Разумовский, Н. А. Родина, Н. Х. Розов, А. П. Савин, Я. А. Смородицкий, А. Б. Сосинский, В. М. Уроев, В. А. Фабрикант

Редакционный совет: А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Б. Б. Буховцев, Е. П. Велихов, И. Я. Верченко, Б. В. Воздвиженский, Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева, А. П. Ершов, Ю. Б. Иванов, Л. В. Канторович, П. Л. Капица, В. А. Кириллин, Г. Л. Коткин, Р. Н. Кузьмин, А. А. Логунов, В. В. Можаяев, В. А. Орлов, Н. А. Патрикеева, А. В. Перышкин, Р. З. Сагдеев, С. Л. Соболев, А. Л. Стасенко, И. К. Сури, Е. Л. Сурков, Л. Д. Фаддеев, В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев

Номер оформили:

М. Б. Дубак, С. В. Красовский, Э. Е. Назаров,
 А. М. Пономарева, М. П. Сидоров, Э. А. Смирнов,
 И. Е. Смирнова, Е. К. Тямчурина;
 фото: А. Маршани (фотохроника ТАСС),
 В. П. Шевченко

Заведующая редакцией Л. В. Чернова

Художественный редактор Т. М. Макарова

Корректор Т. С. Вайсберг

103006, Москва, К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант»,
 тел. 231-82-42

Сдано в набор 15.12.82.

Подписано в печать 14.1.83 Печать офсетная

Бумага 70×108 1/16. Физ. печ. л. 4

Усл. печ. л. 5,6 Уч.-изд. л. 6,8 Т-02913

Тираж 170675

Цена 40 коп. Заказ 3131

Ордена Трудового Красного Знамени
 Чеховский полиграфический комбинат
 ВО «Союзполиграфпром»
 Государственного комитета СССР
 по делам издательств, полиграфии
 и книжной торговли
 г. Чехов Московской области

Шахматная страничка



Консультирует — чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Е. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Я. Гик.

КАСПАРОВ — ПОБЕДИТЕЛЬ МОСКОВСКОГО МЕЖЗОНАЛЬНОГО ТУРНИРА

Два года назад на нашей страничке вы уже встречались с Гарри Каспаровым («Квант», 1981, № 5). Самый молодой гроссмейстер на планете — сейчас ему всего 19 лет — стал тогда чемпионом мира по шахматам среди юношей. А теперь он уже один из претендентов на «взрослую» корону. Осенью 1982 года, показав блестящий результат — 10 очков в тридцати партиях (без единого поражения), он стал победителем Московского межзонального турнира. Посмотрите две его эффектные миниатюры, сыгранные в этом соревновании.

И. Ван дер Виль — Г. Каспаров. Дебют ферзевой пешки
1.d4 Kf6 2.Cg5 Ke4 3.Cf4.

Голландский шахматист отказывается от обычного 2.c4, опасаясь стариндийской защиты — любимого дебюта Каспарова. 3...c5 4.d5 Фb6 5.Cc1. Стоило ли делать два хода подряд слоном, чтобы тут же возвращаться им на место? 5...e6 6.f3 Фа5+ 7.c3 Kf6 8.e4 d6 9.Ка3 ed 10.ed Ce7 11.Кс4 Фd8 12.Ke3 0—0 13.Ke2 Ле8 14.g4.

Как известно, рекордная шахматная партия продолжается всего два хода — 1.f3 e5 2.g4 Фh4× (такой мат называется «дурацким»). Здесь белые придерживаются примерю той же стратегии — они уже пошли f3, а теперь играют g4, оголяя диагональ e1 — h4. Правильно было 13.Cd3, 14.Ke2, и подобраться к белому королю не так просто. 14...Kfd7! Освобождая упомянутую диагональ. Правда, до мата в этой партии дело не дойдет. 15.Kg3 Cg5 16.Kpf2 Ke5 17.Cb5 Cd7

18.C:d7 Kb:d7 19.Ke5 c4! 20.Kh5. Прогрывает фигуру, но и после лучшего 20.Kpg2 C:c1 21.Л:c1 Кс5 положение белых незавидно. 20...Kd3+ 21.Kpg2 C:c1 22.Л:c1 g6. Белые сдались, на 22.Kh6+ Kpf8 23. Kg3 решает 23...Фg5.

Если в предыдущей партии к белым легко предъявить претензии, то победой над румынским гроссмейстером Каспаров обязан самому себе. **Г. Каспаров — Ф. Георгиу** Новиндийская защита
1.d4 Kf6 2.c4 e6 3.Kf3 b6 4.a3 Cb7 5.Кс3 d5 6.cd K:d5 7.Фс2 c5 8.e4 К:c3 9.bc Ce7 10.Cb5+ Cc6 11.Cd3 Kd7 12.0—0 h6. Наверное, лучше было отступить слоном обратно на b7. 13.Ld1 Фс7 14.d5! Излюбленный прием Каспарова, при помощи которого он одержал немало красивых побед — белые жертвуют центральные пешки, но зато открывают линии для атаки. 14...ed 15.ed C:d5 16.Cb5 a6 17.Cf4! Дальше все идет как по маслу. 17...Ф:f4 18.C:d7+ Kp:d7 19.Л:d5+ Kpc7 20.Лe1! Cd6 21.Лf5 Фс4 22.Ле4 Фb5 23.Л:f7+ Kpb8 24.Ле6 Лd8 25.c4 Фс6 26.Ke5 Фс8 27.Фb1. Черные сдались.

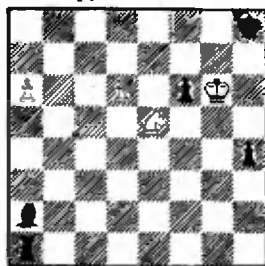
Вторую путевку в матче претендентов завоевал советский гроссмейстер А. Белявский. Следующая партия с кубинским гроссмейстером была важной во многих отношениях. Гарсиа в шести первых турах набрал 5,5 очков! В последующих встречах с тремя советскими участниками он сделал три иичьи. Уверенное шестие кубинца удалось остановить А. Белявскому.

Г. Гарсиа — А. Белявский Ферзевый гамбит
1.d4 d5 2.c4 e6 3.Кс3 Ce7 4.Kf3 Kf6 5.Cg5 h6 6.Ch4 0—0 7.e3 b6 8.Лc1 Cb7 9.C:f6 C:f6 10.cd ed 11.Ce2 Фе7 12.0—0 Лd8 13.Фb3 c5 14.dc bc 15.Лfd1 d4! Этот ход черных застал противника врасплох. Гарсиа долго думал, но ничего хорошего не придумал. 16.Ка4 Ка6 17.C:a6 C:a6 18.К:c5. Разумеется, потеря пешки была предусмотрена Белявским заранее. Инициатива, которую он получает взамен, вставляет белых вернуть материал обратно. 18...Ce2 19.Л:d4. Приходится отдавать качество, на 19.Лd2 сильно 19...Лab8, затем C:f3 и de, 19...Лdc8! Ладья никуда

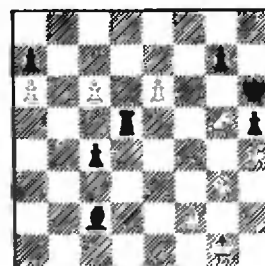
не денется, прежде чем взять ее, черные крепко связывают коня. 20.Фd5. Можно сохранить качество, но после 20.Лd5 Лab8 ни одна из белых фигур не чувствует себя уютно. 20...C:f3 21.Ф:f3 C:d4 22.ed. В принципе у белых достаточный эквивалент за качество — две пешки. Однако искусно маневрируя, Белявскому вскоре удается забрать одну из них. 22...Лab8 23.b3 Лd8 24.Фс3 Фd6 25.Лс4 Ле8 26.Фd2 Фf4! 27.Фd1 Лbd8 28.g3 Фf5 29.Kpg2 Лd6. Возможно, белые рассчитывали сementировать позицию посредством 30.Фf3, но теперь на это следует 30...Ф:f3+ 31.Kp:f3 Лf6+ 32. Kpg2 Ле2. 30.a4 Лf6 31.Лс2 Фd5+ 32.Kpg1 Лb6 33.Ле2 Лd8 34. Фе1 Ф:d4 35.Ле8+ Kph7 36.Л:d8 Ф:d8 37.Фс4+ Kpg8 38.b4 Лd6 39.b5 Лd1+ 40. Kpg2 Фd5. Белые сдались.

Напомним, что турнир в Москве был последним межзональным, в двух других успехах сопутствовал В. Смыслову, З. Рибли, Л. Портишу и Э. Торре. Если добавить финалистов предыдущего цикла В. Корчного и Р. Хюбнера, то теперь нам полностью известна восьмерка претендентов на шахматную корону. Осенью этого года мы узнаем имя нового соперника А. Карпова.

Конкурсные задания



3. Белые начинают и выигрывают.



4. Белые начинают и выигрывают.

Срок отправки решений — 25 апреля 1983 г. (с пометкой на конверте «Шахматный конкурс «Кванта», задания 3, 4»).

Цена 40 коп.

Индекс 70465

Красные треугольники с вершинами в черных точках, показанные на этом рисунке, обладают следующим свойством: ни одна из описанных около них окружностей не содержит внутри себя ни одной черной точки. Существование таких специальных триангуляций обсуждается в решении задачи M770 в этом номере.

